Profesora: Sandra Redaelli

GUIA Nº 2

Funciones

Parte Teórica

Reseña Histórica:

El concepto de función fue evolucionando a través del tiempo. En un principio faltaron incluso simbolismos apropiados y cada matemático tenía nombres y abreviaturas propias, que dificultaban el intercambio de ideas. La primera vez que figura explícitamente la palabra FUNCIÓN es en un trabajo del filósofo, matemático y economista Gotfreed Leibniz en 1962. Posteriormente se fue ajustando el concepto, hasta que: Meter Gustav Dirichlet establece el concepto de función como una correspondencia entre dos variables.

INTERPRETACIÓN DE GRÀFICAS DE FUNCIONES

Estudiaremos funciones en el conjunto de los números reales; se les dice funciones de R en R.
La gráfica de una función nos da mucha información sobre su comportamiento
A los elementos del **dominio**, se los designa en general con “x”, es decir, x es una variable que puede tomar uno cualquiera de los valores del dominio.
A los elementos del codominio se los representa en general con “y”, vale decir que y es una variable que puede tomar uno cualquiera de los valores del codominio.
La función o sea las operaciones o reglas que hay que aplicar a cada valor de x del dominio, para obtener el valor único o imagen que le corresponde en el codominio, se designa en general con f; es decir con f se representa la ley aritmética, trigonométrica o arbitrariamente establecida pero tal que a cada valor de x le hace corresponder un solo valor de y.
Las notaciones más definidas para indicar que al aplicar la función f a un valor de x queda determinado el valor correspondiente de y son:

$$x \to f(x), \qquad y = f(x), \qquad f : x \to f(x)$$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Como consideramos funciones de R en R es decir que los elementos x del dominio como los de y del codominio son números reales, es fácil, en general, en cada caso determinar cuál es el dominio.
El dominio de una función es el mayor conjunto donde está definida la función, vale decir donde se puede calcular la función

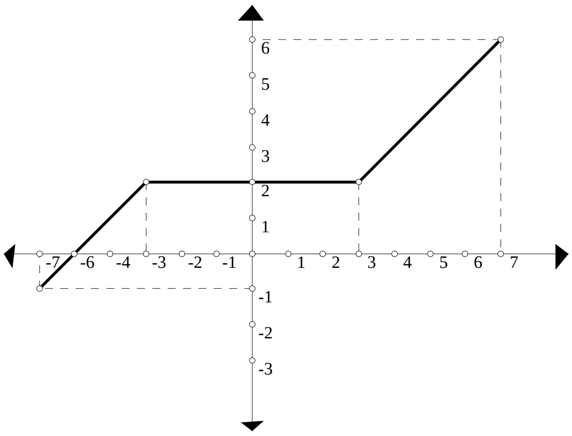
IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Es el mayor conjunto que se puede dar de los valores de y.

Veamos algunos ejemplos

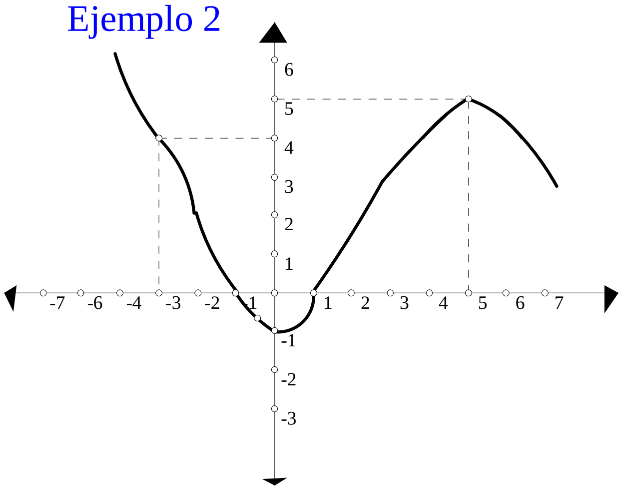
Ejemplos:

Ejemplo 1



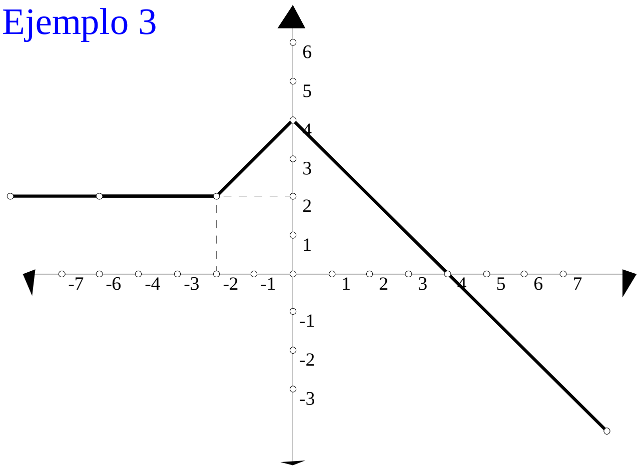
Dm = R
Img = R

Ejemplo 2



Dm = R
Img = R

Ejemplo 3



Dm = R
Img = (-∞;4]

INTERSECCIONES CON LOS EJES

- **Intersección con el eje x**: Las intersecciones del gráfico con el eje x se producen para los valores de x que anulan la función, es decir para cuando y = 0. Hallar las intersecciones con el eje x de una función es lo mismo que encontrar sus raíces, también se lo conoce como conjunto de cero y se lo simboliza Cº. Una función puede intersectar varias veces al eje x. Así, en los ejemplos dados en el ítem anterior tenemos
  Ejemplo 1: ∩ con eje x = (-6; 0)
  Ejemplo 2: ∩ con eje x = (-1; 0), (1; 0) y (9; 0)
  Ejemplo 3: ∩ con eje x = (4; 0)

- **Intersección con el eje y**: Las intersecciones del gráfico con el eje y se producen cuando la variable x se anula, es decir para cuando x =0. Una función puede intersectar solamente una vez al eje y. En las funciones polinómicas el término independiente indica la intersección con el eje y. En los ejemplos dados en el ítem anterior tenemos

  Ejemplo 1: ∩ con eje y = (0;2)
  Ejemplo 2: ∩ con eje y = (0;-1)
  Ejemplo 3: ∩ con eje y = (0;4)

CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

- El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es mayor que cero (o sea f(x) 〉 0). Gráficamente se entiende por conjunto de positividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por encima del eje de las x.

- El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es menor que cero (o sea f(x) 〈 0). Gráficamente se entiende por conjunto de negatividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por debajo del eje de las x.

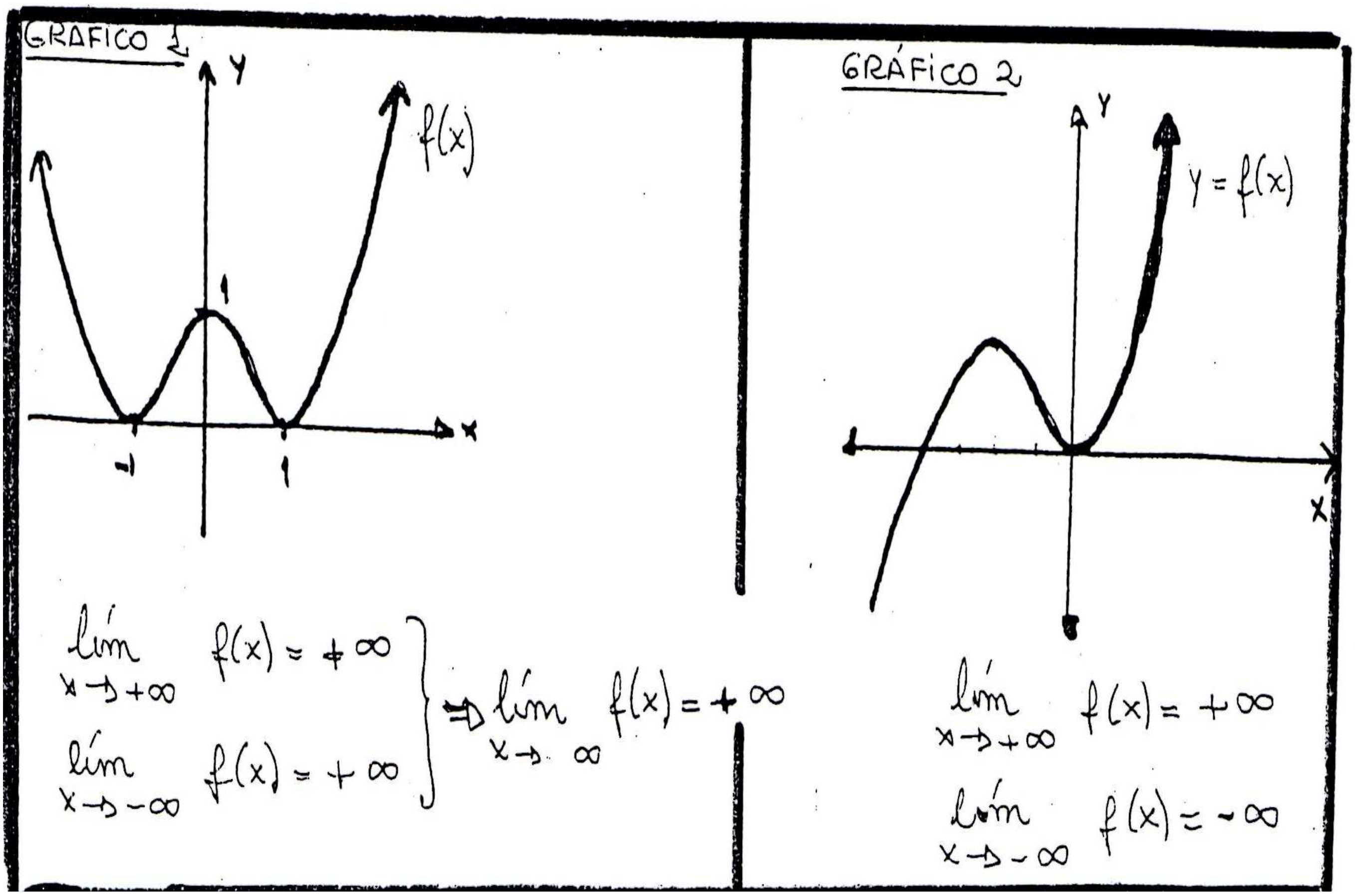
  En los ejemplos anteriores:
  Ejemplo 1: $C^{+} = (-6;+\infty) \quad y \quad C^{-} = (-\infty;-6)$
  Ejemplo 2: $C^{+} = (-\infty;-1) \cup (1;9) \quad y \quad C^{-} = (-1;1) \cup (9;+\infty)$
  Ejemplo 1: $C^{+} = (-\infty;4) \quad y \quad C^{-} = (4;+\infty)$

COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN CUANDO TIENDE A INFINITO

Siempre es interesante fijarse, en cualquier función, en cómo se comporta cuando x tiende a infinito, ya sea hacia +∞ y analizar también el comportamiento hacia -∞ esto nos va a dar una idea sobre que ocurre con las ramas de la función.

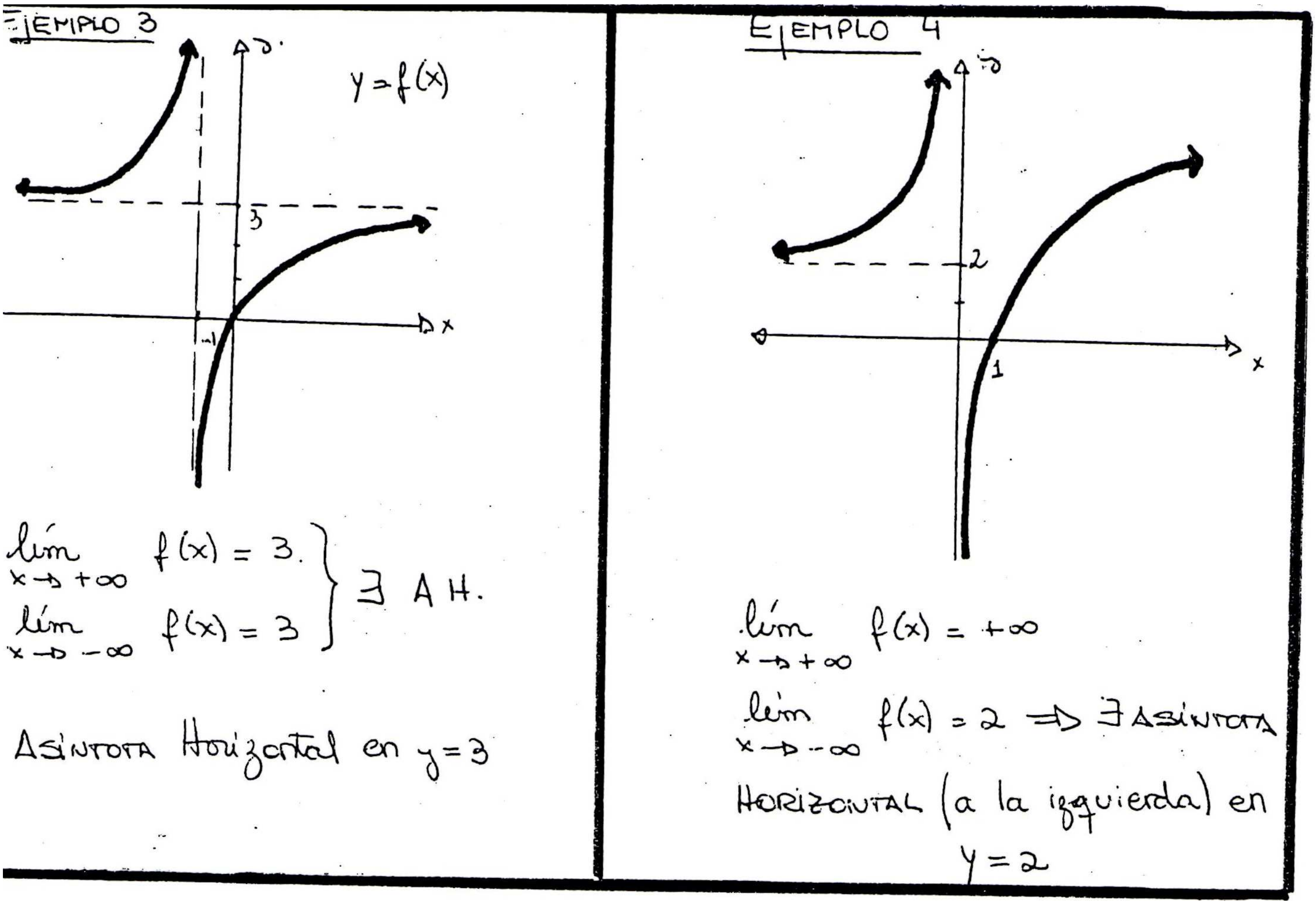
El analizar como se comporta una función cuando tiende a + ∞ o a -∞, se simboliza, se expresa de la siguiente manera: $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

Para comprenderlo mejor, analicemos los siguientes ejemplos:



El análisis del $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ en las funciones anteriores nos da como respuesta hacia donde se dirigen las ramas de la función

Analicemos ahora los ejemplos 3 y 4



El análisis del $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ en las funciones de los ejemplos 3 y 4 nos da como respuesta si la función tiene o no asíntota horizontal. Cuando el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ *tal que a es un número*
Decimos que en y = a , (el número obtenido) la gráfica posee una asíntota horizontal.

ASINTOTAS

Se llaman asíntotas de una función a las rectas a las cuales se aproxima indefinidamente una función, pero nunca toca o cruza dicha recta.
Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas

Asíntota Vertical: Decimos que la función y = f(x) tiene una asíntota vertical en x = a, si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Asíntota Horizontal: Decimos que la función y = f(x) tiene una asíntota horizontal y = a, si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad o \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad o \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Veamos ejemplos:

- Analicemos en el EJEMPLO 3, la existencia o no de asíntotas verticales

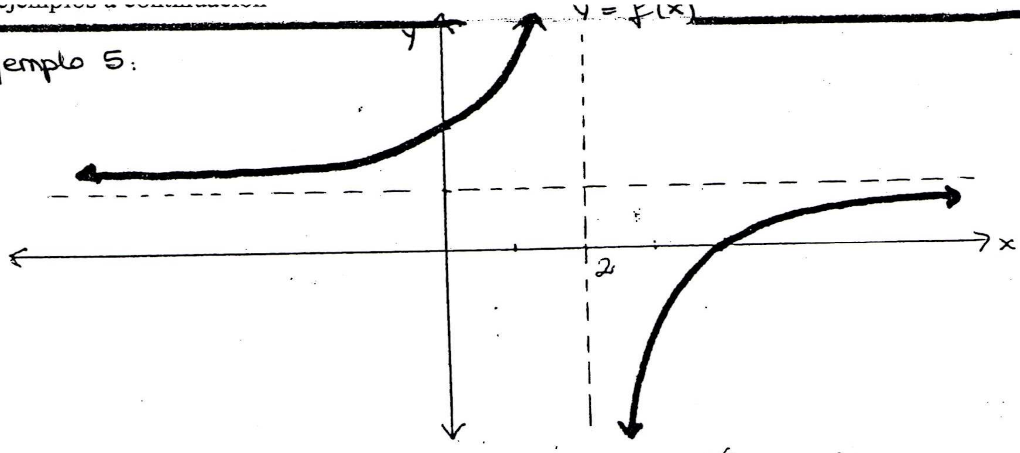
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \exists \;\; asíntota \;\; vertical \;\; en \;\; x = -1$$

- Analicemos en el EJEMPLO 4, la existencia o no de asíntotas verticales

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \exists \;\; asíntota \;\; vertical \;\; en \;\; x = 0$$

Veamos más ejemplos a continuación

Ejemplo 5:



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

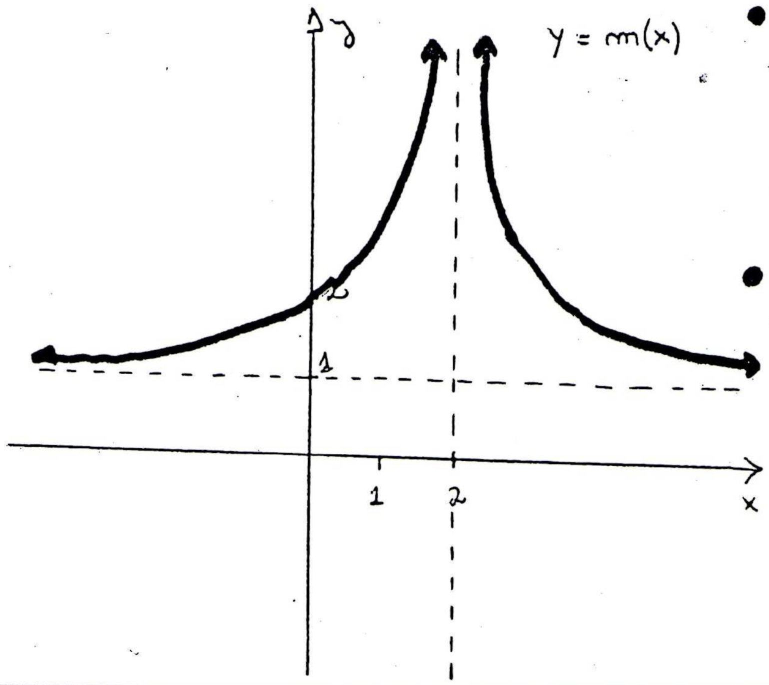
En $x = 2$ hay ASÍNTOTA VERTICAL

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

En $y = 1$ hay ASÍNTOTA HORIZONTAL

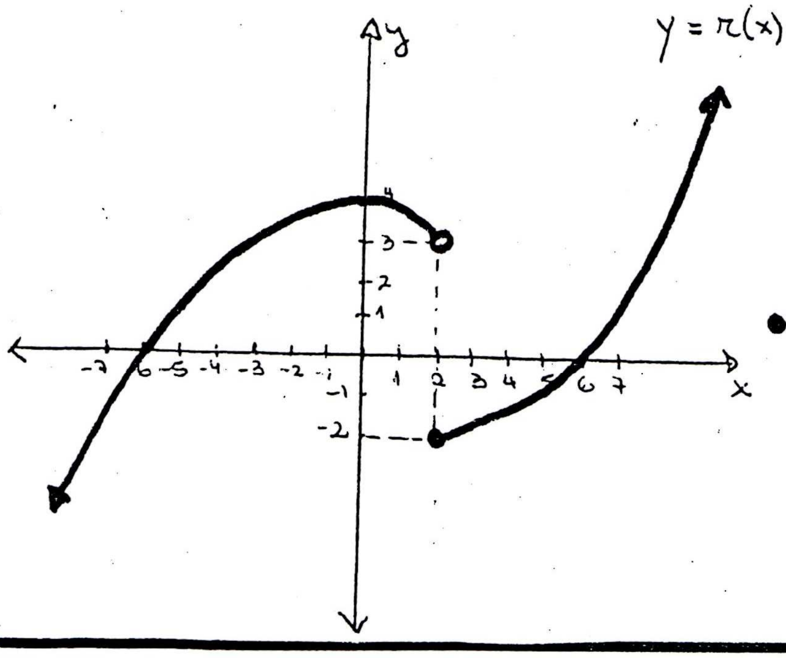
Ejemplo 6:



- $\lim_{x \to 2^+} m(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 2^-} m(x) = +\infty$ } ASÍNTOTA VERTICAL en $x = 2$

- $\lim_{x \to +\infty} m(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} m(x) = 1$ } ASÍNTOTA HORIZONTAL en $y = 1$.

Ejemplo 7:



- Asíntota vertical

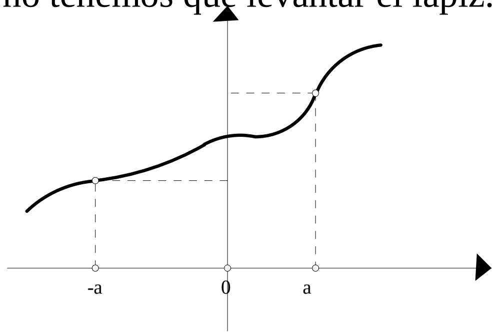
$\lim_{x \to 2^+} r(x) = -2$, $\lim_{x \to 2^-} r(x) = 3$ } $\nexists$ AV.

- Asíntota Horizontal

$\lim_{x \to +\infty} r(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} r(x) = -\infty$ } $\nexists$ AH

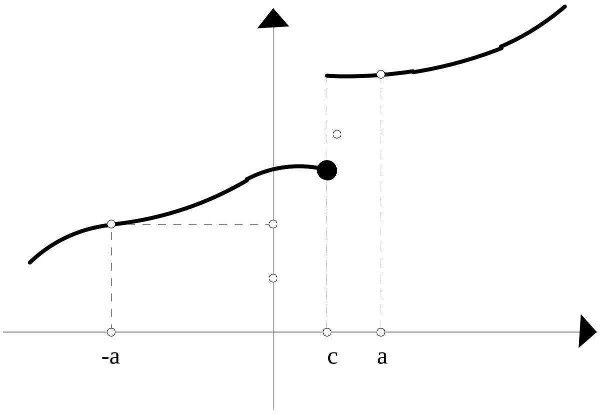
CONTINUIDAD

Podemos decir que una función es de trazo continuo en un intervalo, cuando para dibujarla no tenemos que levantar el lápiz. Veamos algunos ejemplos:



Ésta es una función continua en el intervalo (-a; a)

Ésta no es una función continua en el intervalo (-a; a) pues presenta un salto en x = c



CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

De acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra creciente, crece, aumenta con el tiempo, con la temperatura, etc.; aceptamos intuitivamente que en el punto x = 1 la función es creciente, pues al aumentar los valores de x crecen, aumentan los correspondientes de la función.

Análogamente aceptamos que la función es decreciente en x = 5

Es decir que: una función se dice creciente en un punto, cuando el valor que toma la función en ese punto es mayor que los que toma inmediatamente a la izquierda y menor que los que toma inmediatamente a la derecha; al decir inmediatamente a la izquierda y a la derecha se quiere indicar en un cierto entorno del punto, pues para valores de x más alejados, puede ocurrir que la condición no se cumpla.

Así, podemos afirmar que la función representada posee:

$D = R$

$\mathrm{Im} = R$

$\cap \ eje \ x = (-4;0), (-1;0) \ y \ (6{,}2 \ ; \ 0)$

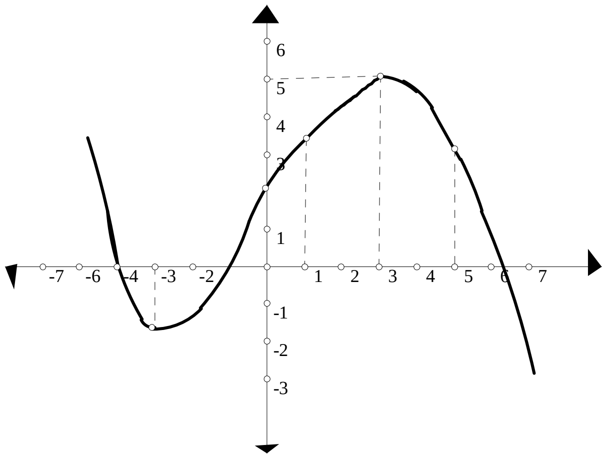
$\cap \ eje \ y = (0;3)$

$C^{+} = (-\infty;4) \cup (-1 \ ; \ 6{,}2)$

$C^{-} = (-4;-1) \cup (6{,}2 \ ; +\infty)$

$Crece = C^{\uparrow} = (-3;3)$

$Decrece = C^{\downarrow} = (-\infty;-4) \cup (3;+\infty)$



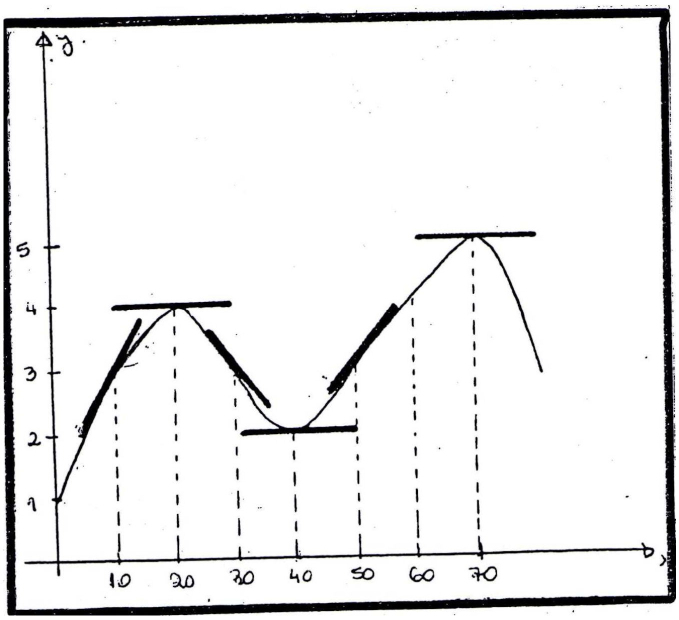
Matemáticamente, sabemos que una función crece o decrece cuando trazamos rectas tangentes a la curva en algunos puntos. Si la pendiente de esas rectas tangentes, en un punto, es positivas entonces la función es creciente en ese punto. Si es negativa, la función es decreciente en ese punto. La recta tangente a una función en un punto en el que ésta tiene un máximo o un mínimo, es horizontal, tiene pendiente cero.
(Recordemos que las rectas con pendiente positivas tienen esta inclinación y las rectas con pendientes negativas poseen esta inclinación)

EJEMPLO:
Al trazar rectas tangentes en algunos puntos podemos saber cómo varía la función. En la gráfica, podemos observar que la función es

Creciente en (0; 20) $\cup$ (40;+∞)
Decreciente en (20; 40)

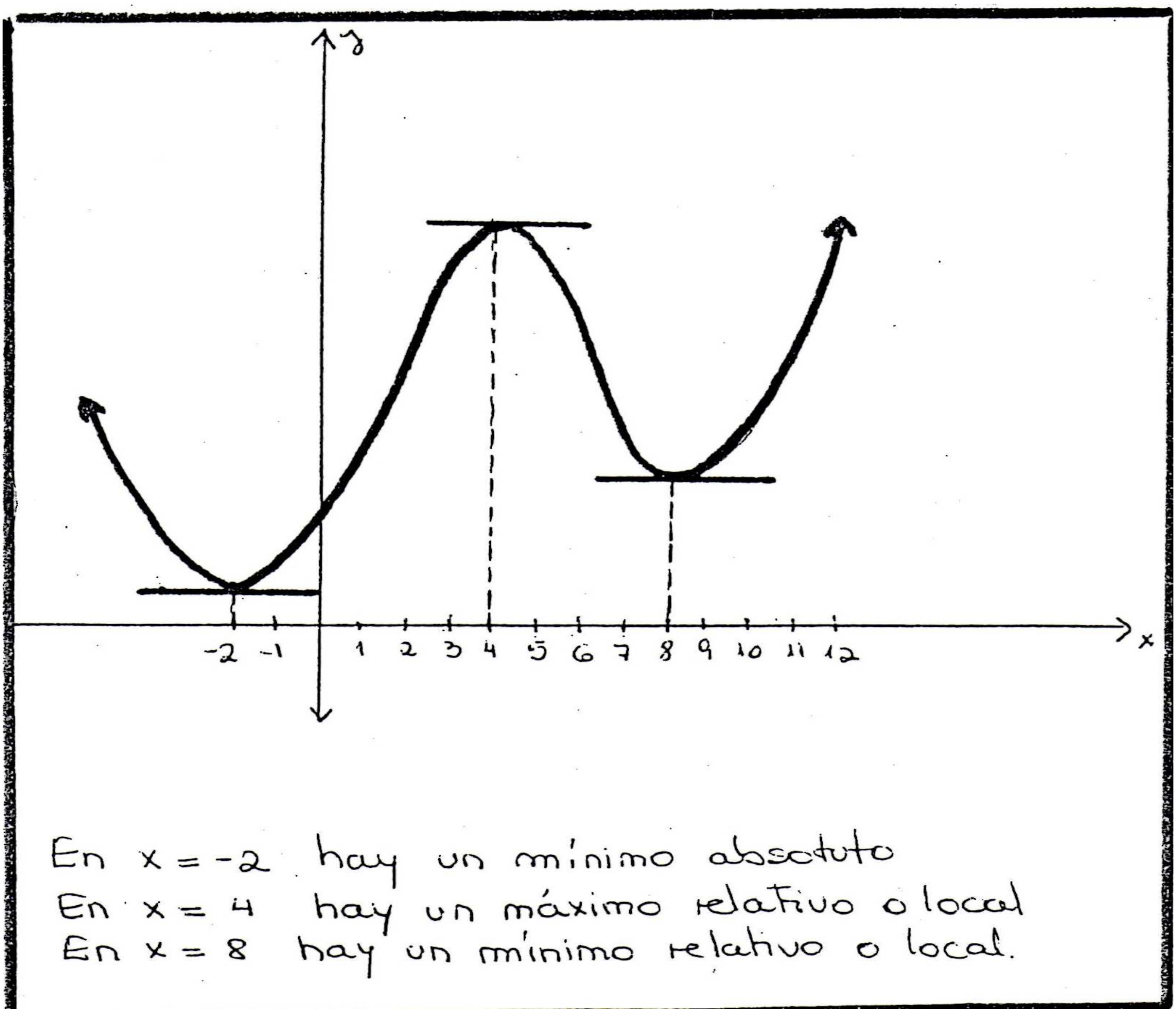
Podemos observar, también, que para x = 50 es creciente y crece más rápidamente que para x = 70.

La recta tangente en x=20 y en x = 40
Son horizontales, lo cual me indica que la función posee máximo o mínimo



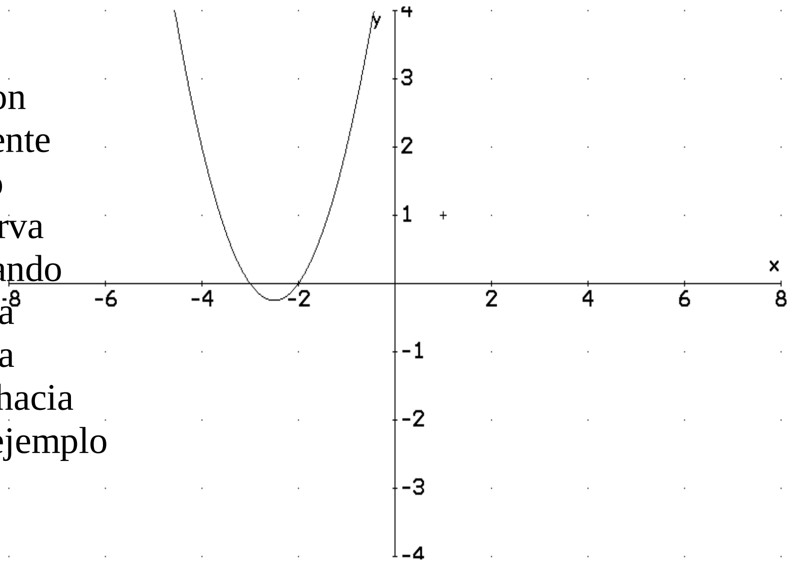
MAXIMOS Y MINIMOS

Se dice que una función alcanza en un punto de su dominio, un máximo relativo o local cuando el valor de la
función en dicho punto es el mayor de los que toma en un entorno del mismo. Análogamente, se dice que una función alcanza un mínimo relativo o local cuando el valor que determina la función en dicho punto, es el menor de los valores que toma en un entorno del mismo. Estos máximos o mínimos se llaman relativos o locales, porque se consideran valores de la función, en puntos vecinos, próximos al punto considerado; en otros más alejados puede ocurrir que la función tome valores mayores que los máximos relativos y menores que los mínimos relativos, a éstos valores se lo llama máximos o mínimos absolutos.

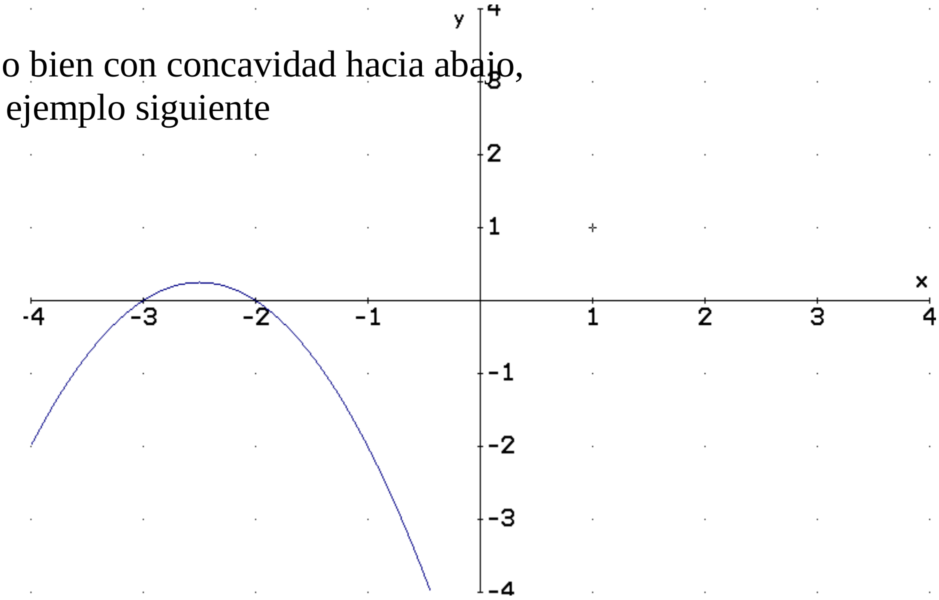


CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

Al hablar de concavidad de acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra, llamamos cóncavo cuando hablamos de una superficie curva hacia adentro y llamamos convexo cuando hablamos de una superficie curva hacia fuera. En matemática un gráfico de una función es cóncavo o con concavidad hacia arriba cuando se presenta como en el ejemplo a continuación

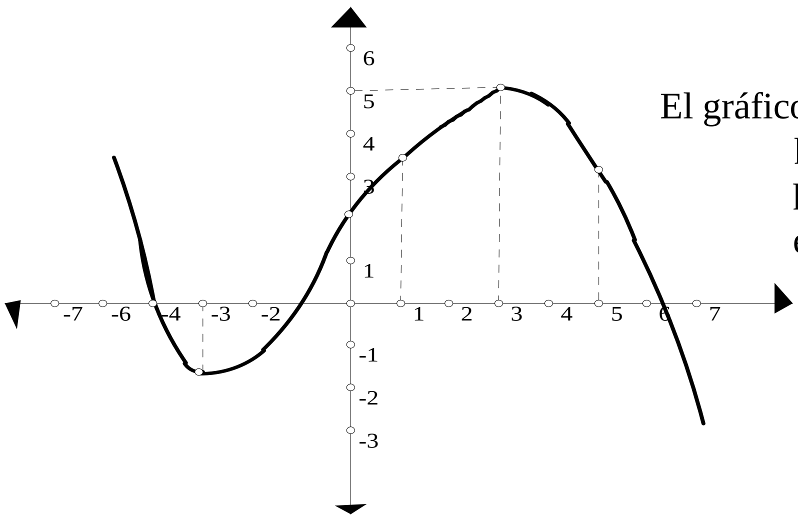


Y decimos que es convexo o bien con concavidad hacia abajo, cuando es como muestra el ejemplo siguiente



PUNTOS DE INFLEXIÓN

Se llama punto de inflexión a aquel en que la curva cambia el sentido de la concavidad



El gráfico de esta función posee concavidad hacia arriba en $(-\infty;0)$, concavidad hacia abajo en $(0;+\infty)$ y en $x=0$ hay un punto de inflexión