Profesora: Sandra Verónica Redaelli

GUIA Nº 8

Integrales

Para Repasar

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes integrales

1) $\int (x+1)(x-1)\,dx =$

2) $\int x.(x-3)(x+2)\,dx =$

3) $\int \frac{x^3+2}{\sqrt{x}}\,dx =$

4) $\int \left(3x-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx =$

5) $\int \left(3.\cos x+2x^4\right) dx =$

6) $\int \frac{1}{3+3x^2}\,dx =$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{27.x}}\,dx =$

8) $\int \left(\frac{3}{2}x^5+\frac{5}{x}\right) dx =$

9) $\int \left(2.e^x+4x^2-3\right) dx =$

10) $\int \left(\sqrt{x}+5.\cos x\right) dx =$

11) $\int \frac{\sqrt[5]{x^4}}{x}\,dx =$

12) $\int \left(\sqrt{5.x^3}-\frac{4}{x^5}+3x\right) dx =$

13) $\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x^7}}-\frac{3}{x^7}+x^7\right) dx =$

14) $\int \left(6.e^x-\frac{1}{x}\right) dx =$

15) $\int \frac{x^3+3x^2+x-4}{x}\,dx =$

16) $\int \sqrt[3]{2x^2}\,dx =$

17) $\int \left(2.e^x+sen\ x\right) dx =$

18) $\int \left(\sqrt{x}+3.e^x+\frac{1}{x}\right) dx =$

Ejercicio 2: Calcular las siguientes integrales definidas

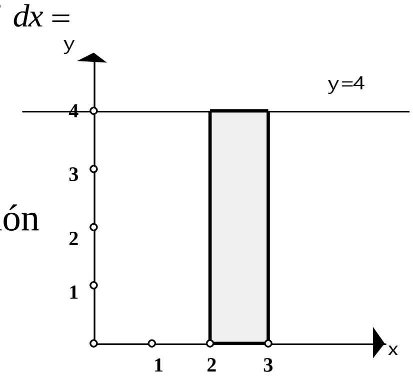
1) $\int_1^2 \left(2x^3-x^2+1\right) dx =$

2) $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2}\,dx =$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x\,dx =$

4) $\int_0^1 (2x+1)^3\,dx =$

5) $\int_0^6 \left(6x+x^2-\frac{x^3}{6}\right) dx =$



Ejercicio 3: Calcula el área de la siguiente región por integración y luego verifica el resultado obtenido utilizando la fórmula geométrica más conveniente.

Ejercicio 4: Calcula el área del polígono determinado por la recta y = 2x+1, el eje y, el eje x y la recta x=3

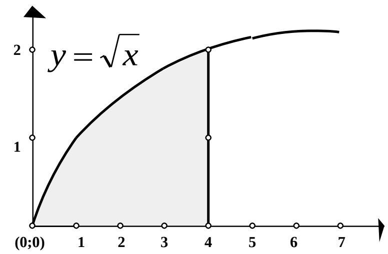
Ejercicio 5: Hallar el área de la región limitada por $y=\frac{1}{2}x^2+2$,

el eje x y las rectas x= -2 y x= 0

Ejercicio 6: Hallar el área de la región limitada por la curva $y=-x^2+5$, el eje y; y la recta y= 1

Ejercicio 7: Hallar el área de la región limitada por la curva $y=x^2+2x+1$, el eje y; y la recta y= 9

Ejercicio 8: Hallar el área de la zona sombreada



Ejercicio 9: Hallar el área limitada por $y=x^3$ y la bisectriz del primer cuadrante

Ejercicio 10: Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $y=x.(x-2)$ e $y=2x.(1-x)$

Ejercicio 11: Calcula el área bajo la curva $y=x^2$ entre x = 1 y x = 2

Ejercicio 12: Calcula el área bajo la curva $y=x^3$ entre x = 0 y x = 3

Ejercicio 13: Calcula el área bajo la curva $y=\sqrt{x}$ entre x = 0 y x = 4

Ejercicio 14: Resuelve las integrales inmediatas

1.- $\int (3x^3-5x^2+3x+4)\ dx$

2.- $\int (\operatorname{sen} x+7\cos x-1)\ dx$

3.- $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\ dx$

4.- $\int (4x+2)(x-1)\ dx$

5.- $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x}\, dx$

6.- $\int \left(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4\right) dx$

Ejercicio 15:

Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x$, calcula:

a) $\int_0^6 f(x)$

b) $\int_{-1}^0 f(x)$

Ejercicio 16: Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (2x-3)\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{5-x}{x^3}\,dx$

c) $\int_1^5 2\sqrt{x-1}\,dx$

d) $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

e) $\int_{-2}^0 (x-2)(x+1)\,dx$

f) $\int_0^4 \left(1+2\sqrt{x}\right)^2 dx$

g) $\int_0^1 (2a+1)^4\, da$

h) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senx}\, dx$

j) $\int_0^3 (-x^2+x-1)\,dx$

k) $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}t-2\right)^2 dt$

l) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$

Ejercicio 17: Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=6$.

Ejercicio 18: Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x

Ejercicio 19: Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 9 - x^2$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 20: Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y el eje de abscisas en el intervalo [0,6]

Ejercicio 21: Halla el área comprendida entre las parábolas $y = 8 - x^2$; $y = x^2$

Ejercicio 22: Halla el área comprendida entre las curvas $y=6x-x^2$; $y=x^2-2x$

Ejercicio 23: Área del recinto limitado por la parábola $y=3x-x^2$ y la recta $y=x-3$

Ejercicio 24: Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=x^2$, la recta de ecuación $y=x+2$

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1) $\frac{x^3}{3}-x+c$

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2+c$

3) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+c$

4) $3x^3-6.\,lnx-\frac{1}{3}x^{-3}+c$

5) $3\,\text{sen}\,x+\frac{2}{5}x^5+c$

6) $\frac{1}{3}arc\,tg\,x$

7) $\frac{2}{\sqrt{7}}x^{\frac{1}{2}}+c$

8) $\frac{1}{4}x^6+5\ln x+c$

1) $2e^x+4\frac{x^3}{3}-3x+c$

10) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+5\,lnx+c$

11) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+c$

12) $\frac{2}{5}\sqrt{5}\;x^{\frac{5}{2}}+x^{-4}+\frac{3}{2}x^2+c$

13) $-3x^{-\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}x^{-6}+\frac{1}{8}x^8+c$

14) $6e^x-\ln x+c$

15) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x-4\ln x+c$

16) $\frac{3\sqrt[3]{2}}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

17) $2.\,e^x-\cos x+c$

18) $2/3x^{\frac{3}{2}}+3.\,e^x+\ln x+c$

Ejercicio 2:

1) 37/6   2) 6/5   3) 1   4) 2   5) 126

Ejercicio 3: 4

Ejercicio 4: 49/4

Ejercicio 5: 16/3

Ejercicio 6: 14/3

Ejercicio 7: 208/3

Ejercicio 8: 16/3

Ejercicio 9: ½

Ejercicio 10: 32/27

Ejercicio 11: 7/3

Ejercicio 12: 81/4

Ejercicio 13: 16/3

Ejercicio 14:

1) $\int \left(3x^3 - 5x^2 + 3x + 4\right)\, dx = 3\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x + C$

2) $\int \left(\operatorname{sen} x + 7\cos x - 1\right)\, dx = -\cos x + 7\operatorname{sen} x - x + C$

3) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = 4\sqrt{x} + C$

4) $\int (4x+2)(x-1)\, dx = \int \left(4x^2 - 2x - 2\right)\, dx = \frac{4x^3}{3} - x^2 - 2x + C$

5) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + C$

6) $\int \left(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4\right)\, dx = \int \left(2x^{1/2} - x^{1/3} - x^4\right) dx = 2\frac{x^{1/2+1}}{1/2 + 1} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3 + 1} - \frac{x^5}{5} = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{x^5}{5} + C$

Ejercicio 15: a) 9/2 b) 13/6

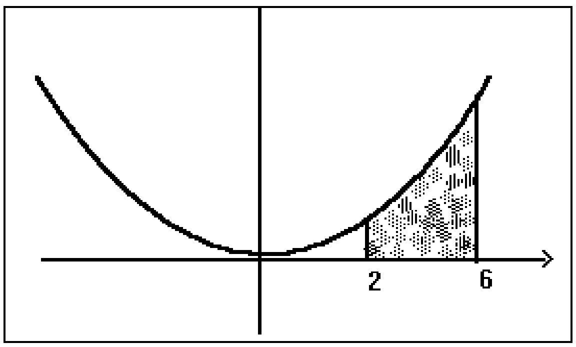
Ejercicio 16:

a) -2 **b)** $\frac{11}{8}$ **c)** $\frac{32}{3}$ **d)** $\frac{a^2}{6}$ **e)** $\frac{2}{3}$ **f)** $\frac{172}{3}$ **g)** $24{,}2$ **h)** 0 **i)** 1 **j)** $-\frac{15}{2}$ **k)** $\frac{43}{3}$

Ejercicio 17:

La recta y=0 es el eje x. El área del recinto limitado por una función f(x), el eje x y la rectas x=a, x=b, viene dada por el valor absoluto de la integral $I = \int_a^b f(x)dx$

siempre que la función f(x) no corte al eje x en ningún punto interior del intervalo [a,b]



$$I = \int_2^6 x^2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$

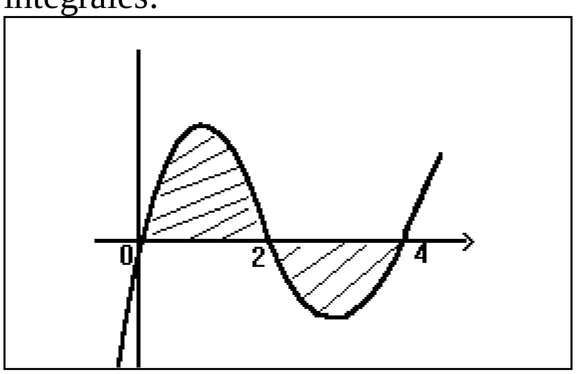
$$\text{Area}= \left|\frac{208}{3}\right| = \frac{208}{3}\ u^2$$

Ejercicio 18: Calculamos los puntos de intersección de la curva con el eje **x :**

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$(x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son 0, 2 y 4 , por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$I_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4;$$

$$I_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = -4;$$

Area= |4 |+ |-4 |=8

Ejercicio 19:

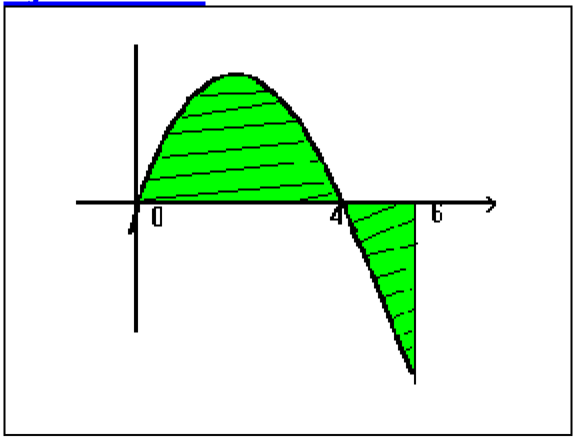
Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje **x:**

9-x^2=0   x=3; x=-3

$$I=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}=(27-9)-(-27+9)=36$$

Area= $|36|$ u=36

Ejercicio 20:



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo [0,6].

4x-x^2=0⇒x(4-x)=0⇒x=0; x=4

Como hay un punto de corte dentro del intervalo [0,6] que es x = 4, las integrales a plantear son:

$$I_1=\int_{0}^{4}(4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{4}$$

$$I_1=32-\frac{64}{3}=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{3}$$

$$I_2=\int_{4}^{6}(4x-x^2)dx; \qquad I_2=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{4}^{6}=(64-72)-\frac{32}{3}=-\frac{56}{3}$$

Area=$\left|\frac{32}{3}\right|+\left|-\frac{56}{3}\right|=\frac{88}{3}$; Area $=\frac{88}{3}u^2$

Ejercicio 21:

Buscamos los puntos de corte de las dos curvas:

$$8-x^2=x^2\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Los límites de integración son -2 y 2

La función a integrar es la diferencia de las dos funciones.

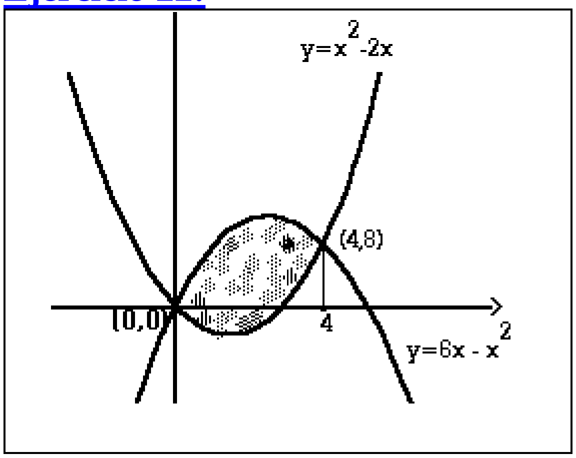
$8-x^2-x^2=8-2x^2$, por tanto,

$$I=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx=\left[8x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$I=(16-\frac{16}{3})-(-16-\frac{-16}{3})=32-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

$$Area = \left|\frac{64}{3}\right| u^2 = \frac{64}{3} u^2$$

Ejercicio 22:



$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0; \quad x = 4$$

Función a integrar:
$(x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 2x^2 - 8x$

$$I = \int_0^4 (2x^2 - 8x)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2\right]_0^4 = = \frac{128 - 192}{3} = -\frac{64}{3}$$

$$\text{Area} = \left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3} \text{ u}^2$$

Ejercicio 23:

Límites de integración: $3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtiene x=3; x=-1

Función a integrar: $I = \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = -\frac{32}{3}$

$$\text{Area} = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3} u^2$$

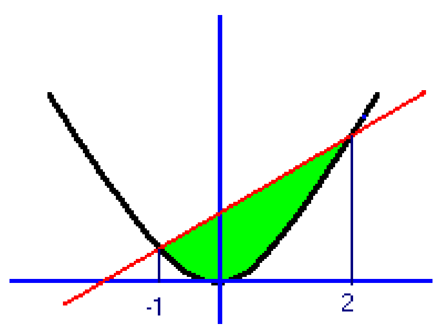
Ejercicio 24:

Límites de integración:

Son los puntos de corte de la parábola y la recta: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Función a integrar: $x + 2 - x^2$ (Diferencia de las dos funciones)



Hemos de resolver la integral siguiente:

Profesora: Sandra Verónica Redaelli

$$I=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

$$Area=\left|\frac{9}{2}\right|u^2=\frac{9}{2}u^2$$