TRIGONOMETRÍA

La Ola Marina Más Alta:

La ola marina más alta registrada oficialmente fue medida a bordo del barco estadounidense "Ramapo" durante la noche del 6 al 7 de febrero de 1993. Utilizando cálculos trigonométricos, el teniente Margraff pudo averiguar que la ola tenía, hasta la cresta, una altura aproximada de 34 metros (como un edificio de 13 pisos).

La palabra TRIGONOMETRÍA es de origen griego y proviene de los vocablos tri (tres), gono (ángulo) y metría (medida).

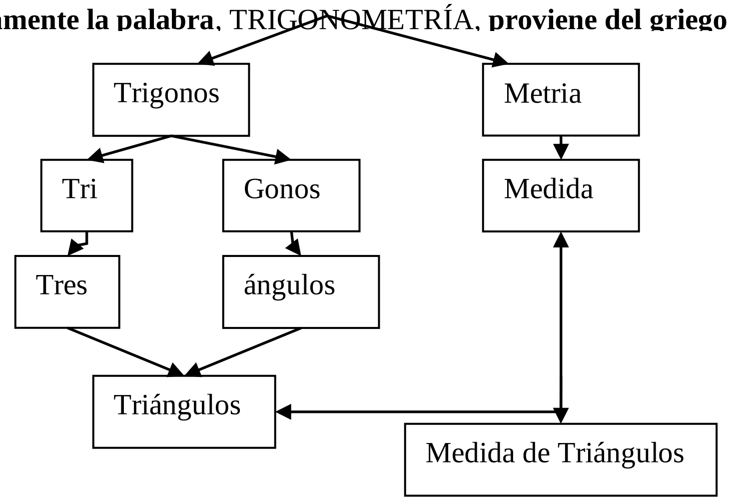
Se cree que, como ciencia, la trigonometría nació con Hiparco (siglo II a. J. C.). Este gran astrónomo creó una matemática aplicada para predecir los eclipses y los movimientos de los astros, para contar con calendarios más precisos y para lograr mayor seguridad en la navegación.

La trigonometría, que se ocupa de relacionar las medidas de los lados de un triángulo con sus ángulos, es de gran utilidad cuando se trata de medir longitudes inaccesibles al ser humano, como lo son, por ejemplo, la altura de la ola a la que se hizo referencia, la altura de las montañas, torres y árboles, o la anchura de los ríos, pantanos y lagos.

En éste capítulo aprenderemos algunas técnicas necesarias para resolver situaciones problemáticas con triángulos rectángulos.

¿Qué es la trigonometría?

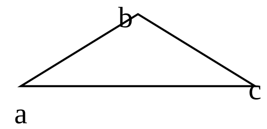
Etimológicamente la palabra, TRIGONOMETRÍA, **proviene del griego**



Trigonometría : Consiste en relacionar y hacer cálculos con las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo

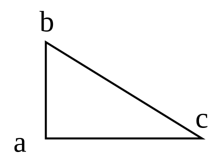
Recordemos algunas cosas sobre ángulos

* En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es de: …



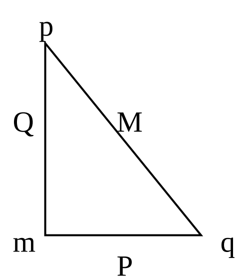
$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=$.......

* En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos es……..



$\hat{a}=$.........

* Al lado opuesto al ángulo recto (en nuestro caso M = $\overline{pq}$) se lo llama …………. y los otros dos lados Q y P son catetos

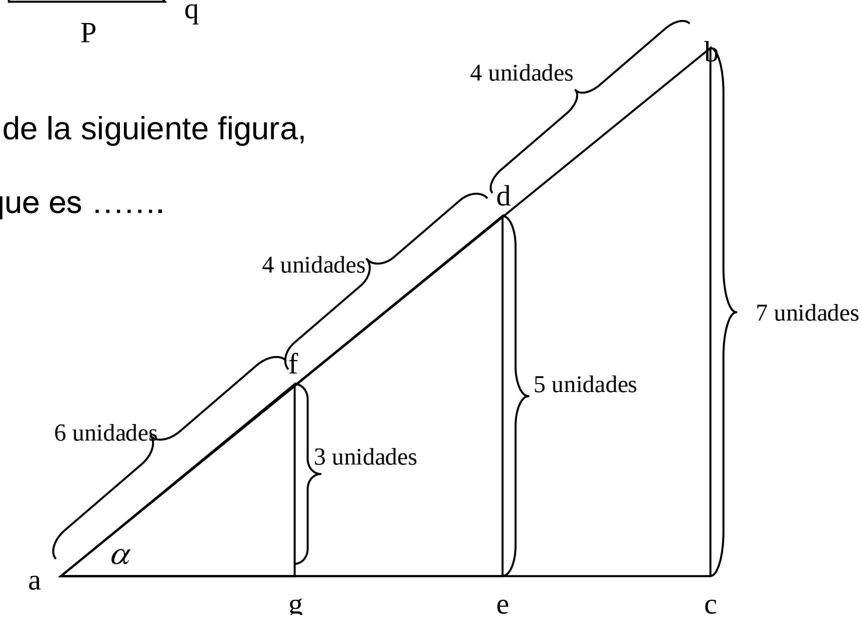


$\overline{pm}=Q$ *es un ……*

$\overline{pq}=M$ *es un …..*

$\overline{mq}=P$ *es un ……*

Los triángulos acb ; aed y agf, de la siguiente figura, son triángulos rectángulos y tienen un ángulo en común que es …….



Teniendo en cuenta la medida de los lados indicados, completa:

$\overline{bc} = ...$ $\overline{de} = ...$ $\overline{fg} = ...$

$\overline{ab} = ...$ $\overline{ad} = ...$ $\overline{af} = ...$

$\dfrac{\overline{bc}}{\overline{ab}} = ...$ $\dfrac{\overline{de}}{\overline{ad}} = ...$ $\dfrac{\overline{fg}}{\overline{af}} = ...$

El cociente (división) entre estos pares de lados es ……. en los tres triángulos rectángulos.

La división que hemos calculado es $\dfrac{cateto \quad opuesto \quad de \quad \alpha}{Hipotenusa}$ y éste nos dio, en los tres triángulos analizados igual, porque ese cociente NO depende del triángulo elegido, sino de α y en un principio dijimos que α era el ángulo común en los tres triángulos.

A ese cociente lo llamamos SENO DE α y lo escribimos así senα.

> Es decir: sen $\alpha = \dfrac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa}$

Análogamente al procedimiento anterior, podemos demostrar que:

COSENO $\longrightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

TANGENTE $\longrightarrow$ $tg\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

SECANTE $\longrightarrow$ $\sec\alpha = \dfrac{hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$

COSECANTE $\longrightarrow$ $\cos ec\ \alpha = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

COTANGENTE $\rightarrow$ $\cot g\ \alpha = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

Profesora de Matemática: Sandra Verónica Redaelli

Observen la siguiente disposición.

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \longrightarrow \cos ec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$\cos \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \longrightarrow \sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$$

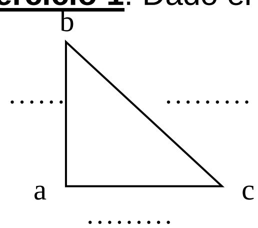
$$tg \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \longrightarrow \cot g\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

1° GRUPO
A éstas funciones se la DIRECTAS

2° GRUPO
A éstas funciones se las llama INVERSAS

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} \qquad \text{sec}\ \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{\cos \alpha}{sen\ \alpha}$$

Ejercicio 1: Dado el triángulo rectángulo abc. Completa los puntos suspensivos

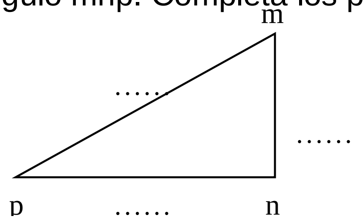


$$\text{Sen}\ \hat{b} = \frac{C.O.}{H} \Rightarrow sen\ \hat{b} = \frac{.......}{.......}$$

$$\text{Cos}\ \hat{b} = \frac{C.A.}{H} \Rightarrow \cos \hat{b} = \frac{.......}{.......}$$

$$\text{Tg}\ \hat{b} = \frac{C.O.}{C.A.} \Rightarrow tg\ \hat{b} = \frac{.......}{.......}$$

Ejercicio2: Dado el triángulo mnp. Completa los puntos suspensivos



$$sen\ \hat{p} = \frac{C.O.}{H.} = \frac{.......}{.......}$$

$$cos\ \hat{p} = \frac{C.A.}{H.} = \frac{.......}{........}$$

$$tg\ \hat{p} = \frac{C.O.}{C.A.} = \frac{.......}{........}$$

$$sen\ \hat{m} = \frac{C.O.}{H.} = \frac{.......}{.......}$$

$$cos\ \hat{m} = \frac{C.A.}{H.} = \frac{.......}{........}$$

$$tg\ \hat{m} = \frac{C.O.}{C.A.} = \frac{.......}{........}$$

CONCLUSIÓN: Las funciones trigonométricas varían porque varían los………………

TRABAJEMOS CON LA CALCULADORA

La calculadora posee 3 teclas que son:

SIN	COS	TAN
↓	↓	↓
seno	coseno	tangente

Si quisiéramos hallar el seno de un ángulo. Por ejemplo queremos hallar el sen $45°25'3''$

Procedemos de la siguiente manera:

AC	4	5	°' "	2	5	°' "	3	°' "	sin	off

Probalo con tu calculadora, ¿obtuviste 0,712240473?.....
¿Cuánto dará el cos 25°3'42''? .... ¿obtuviste 0,905852403?

Por comodidad y para no trabajar con tantas cifras decimales vamos a aprender cómo se redondea:

Aproximación por redondeo:

- Si la primera cifra a eliminar es mayor o igual que cinco, sumamos 1 a la cifra anterior.
- Si la primera cifra a eliminar es menor que 5, suprimimos todas las cifras a partir de ella

Ejemplos:

1) 5,347216 redondeo a 2 cifras: 5,35
2) 0,283142 redondeo a 2 cifras: 0,28
3) 10,49765 redondeo a 2 cifras: 10,50

Ejercicio 3: Redondea los siguientes números a 2 cifras

1) 4,02543 2) -4,1111111 3) 2,245498 4) 7,1923457

5) 3,357910 6) 4,250049

Ejercicio 4. Halla utilizando tu calculadora y une con la respuesta correcta (las repuestas fueron redondeadas a dos cifras)

1) sen 37°=	a) 0,71
2) sen 4°17'36"=	b) 0,24
3) sen 78°43'=	c) 0,97
4) sen 45°=	d) 0,98
5) cos 76°=	e) 0,07
6) cos 15°25'18"=	f) 0,96
7) cos 68°17"=	g) 3,14
8) cos 15°=	h) 0,37
9) tg 59°=	i) 0,55
10) tg 72°20'43"=	j) 0,60
11) tg 38°17'=	k) 1,66
12) tg 29°15"=	l) 0,79

Ejercicio 5: Supongamos el problema inverso al ejercicio 4. Es decir, nos dan el valor del sen α y queremos hallar cuánto es α

Ejemplo: sen α= 0,71, hallar α=…………

Procedemos de la siguiente manera:

AC	0	•	7	1	shift	sin	shift	°' "	off

¿Obtuviste 45°14'5"?....... es decir sen α= 0,71 $\Rightarrow$ α = 45°14'5"

<u>Ejercicio 6</u>: Hallar α, utilizando tu calculadora:

a) sen α = 0,68 $\Rightarrow$ α = …………

b) cos α = 0,5 $\Rightarrow$ α = …………

c) tg α = 0,48 $\Rightarrow$ α = …………

d) sen α = 0,74 $\Rightarrow$ α = …………

e) cos α = 0,12 $\Rightarrow$ α = …………

f) tg α = 28,64 $\Rightarrow$ α = …………

g) cos α = 0,82 $\Rightarrow$ α = …………

h) tg α = 1,54 $\Rightarrow$ α = …………

i) sen α = 0,83 $\Rightarrow$ α = …………

j) sen α = 1 $\Rightarrow$ α = …………

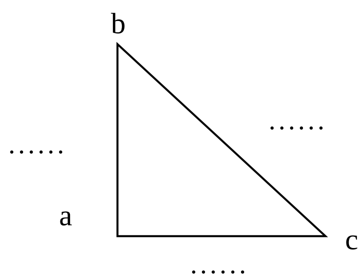
k) cos α = 0,23 $\Rightarrow$ α = …………

l) tg α = 9,99 $\Rightarrow$ α = …………

<u>TEOREMA DE PITÁGORAS</u>

El **Teorema de Pitágoras** dice que:

"**En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**"



En símbolos:

$A^2 = B^2 + C^2$

Vamos a demostrar este teorema,

$$sen\ b = \frac{cat.\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \qquad (1)$$

$$\cos b = \frac{cat.\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \qquad (2)$$

Elevando al cuadrado las 2 expresiones (la expresión (1) y (2))

$$sen^2 b = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{B^2}{A^2}$$

$$\cos^2 b = \left(\frac{C}{A}\right)^2 = \frac{C^2}{A^2}$$

Así tenemos que: $\quad sen^2 b = \frac{B^2}{A^2}$

+

$$\cos^2 b = \frac{C^2}{A^2}$$

Sumando miembro a miembro las 2 igualdades

$$\underbrace{sen^2 b + \cos^2 b}_{\text{Por relación pitagórica es igual a ……}} = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2}$$

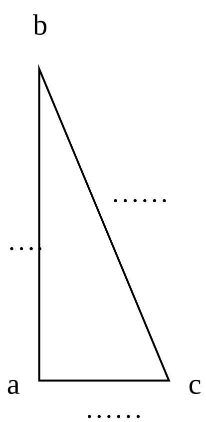
$$1 = \frac{B^2}{A^2} + \frac{C^2}{A^2}$$ Sacamos común denominador A^2

$$1 = \frac{B^2 + ...}{A^2}$$ Como A^2 está dividiendo pasa al otro miembro multiplicando

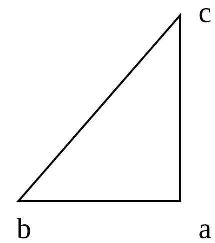
$$\boxed{A^2 = B^2 + C^2}$$ Teorema de Pitágoras

RESOLUCION DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Los llamados problemas de resolución de triángulos rectángulos consisten en calcular los lados o ángulos de un triángulo conociendo algunos de los lados o ángulos como datos. Para ello recordamos todo lo aprendido sobre triángulos rectángulos, hasta ahora.

FIGURA		
	$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = ...$	Relaciona los ángulos
	Teorema de Pitágoras $C^2 = ... + ...$	Relaciona los lados
	Funciones Trigonométricas $sen\,\alpha = \frac{C.Op.}{.......}$ $\quad$ $\cos ec\,\alpha = \frac{........}{.......}$ $\cos\alpha = \frac{C.Ady.}{.........}$ $\quad$ $\sec\alpha = \frac{........}{.......}$ $tg\,\alpha = \frac{C.Op.}{.........}$ $\quad$ $\cot g\,\alpha = \frac{.......}{.......}$ Funciones Directas $\quad$ Funciones Inversas	Relaciona ángulos con lados

Ejemplo 1: Dado el triángulo rectángulo en $\hat{a}$,sabiendo que A= 20 cm.; $\hat{b}$ = 30°.Halla los restantes elementos del triángulo, es decir: B, C, $\hat{c}$ y $\hat{a}$.



Calculo de $\hat{c}$

$$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=180^\circ$$

$$90^\circ+30^\circ+\hat{c}=180^\circ$$

$$120^\circ+\hat{c}=180^\circ$$

$$\hat{c}=180^\circ-.......$$

$$\hat{c}=........$$

Cálculo de B: Para calcular B debo encontrar una relación que vincule a B con los datos que son A y $\hat{b}$ (en este caso es la función seno)

$$sen\ \hat{b}=\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$sen\ \hat{b}=\frac{...............}{A}$$

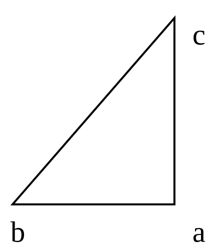
$$........=\frac{B}{20\ cm}$$

$$.......\times.........=B$$

$$............=B$$

Cálculo de C

Ejemplo 2



Datos: $\begin{cases} A=3cm \\ B=1{,}2cm \end{cases}$

Cálculo de C: Aplicamos el teorema de Pitágoras

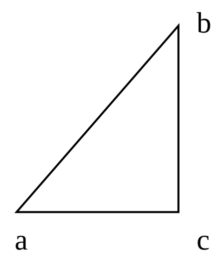
$$A^2 = B^2 + C^2$$
$$(3\ cm.)^2 = \ldots\ldots. + C^2$$
$$9\ cm^2 = \ldots\ldots..+ C^2$$
$$9\ cm^2 - \ldots\ldots. = C^2$$
$$7{,}56\ cm^2 = C^2$$
$$\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots} = C^2$$
$$2{,}75\ cm. = C$$

Cálculo de $\hat{b}$: Usamos la función seno

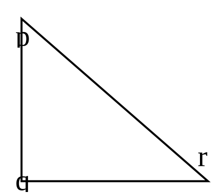
$$sen\ \hat{b} = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}$$
$$sen\ \hat{b} = \frac{B}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$sen\ \hat{b} = \frac{1{,}2\ cm}{3\ cm}$$
$$sen\ \hat{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\hat{b} = 23^\circ 34' \ldots\ldots''$$

Cálculo de $\hat{c}$

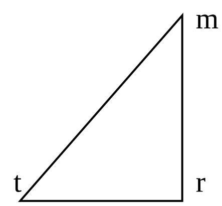
Ejercicio 7: Dado abc triángulo rectángulo.
Si A = 25,4 m y $\hat{b} = 63^\circ 38' 42''$. Hallar: B, C; $\hat{c}\ y\ \hat{a}$

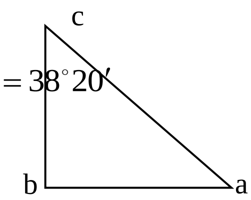


Ejercicio 8: pqr triángulo rectángulo, si P = 11 cm. y $\hat{r} = 72^\circ 5'$.
Calcula el perímetro



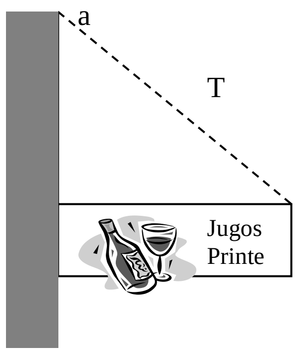
Ejercicio 9: Si R = 49 m y M = 3000 cm. y mrt es un triángulo rectángulo. Halla el valor de los ángulos





Ejercicio 10: Dado abc triángulo rectángulo en $\hat{b}$. Si B = 40 cm. y $\hat{a} = 38^\circ 20'$
Calcula la superficie

Ejercicio 11: Calcula la longitud T del cable, que sostiene un cartel de 1,85 metros de ancho y tal que el punto "a" de fijación está a 120 cm. del borde superior del cartel.
¿Qué ángulo forma el cable con el borde superior del cartel?



Ejercicio 12: Determina la superficie de un paralelogramo cuyos lados miden 42,5 cm. de base por 0,2 metros y el ángulo comprendido entre ambos lados es de 66°30'.
(Recordar Superficie del paralelogramo = b x h).

Ejercicio 13: Halla la altura de un triángulo isósceles, cuya base mide 16,5 cm. y el ángulo opuesto a ella 36°.

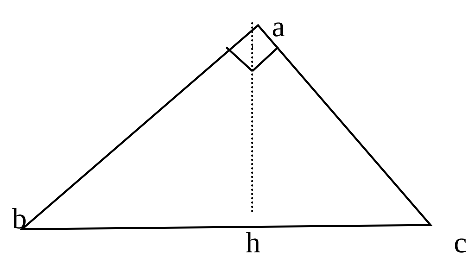
Ejercicio 14: Calcula la longitud del lado del un cuadrado cuya diagonal mide 42 cm.

Ejercicio 15: Te encuentras a 1.200 metros de la plataforma de lanzamiento de un cohete. Poco después de su lanzamiento vertical, lo observas con un ángulo de elevación de 56°. ¿A qué altura se encuentra el cohete?.

Ejercicio 16: Un avión se eleva a un ángulo de 40° con respecto al suelo. ¿A qué distancia de su punto de partida se encuentra cuando alcanza una altura de 1.300m?

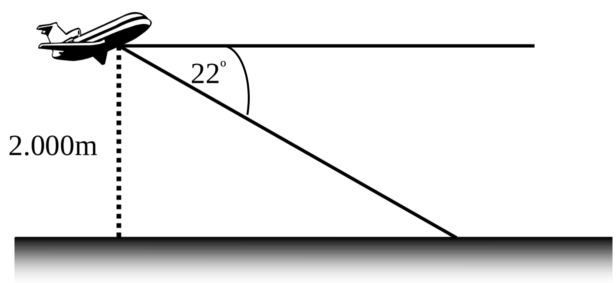
Ejercicio 17: Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 5 cm. y uno de sus catetos la mitad de ésta. Calcula sus ángulos.

Ejercicio 18: En el triángulo rectángulo abc; $\hat{a} = 90^\circ$;
$\overline{ab} = 7\ cm; \overline{ac} = 4\ cm \quad y \quad \overline{bh} = 6\ cm$ ¿Cuánto mide $\hat{c}$?



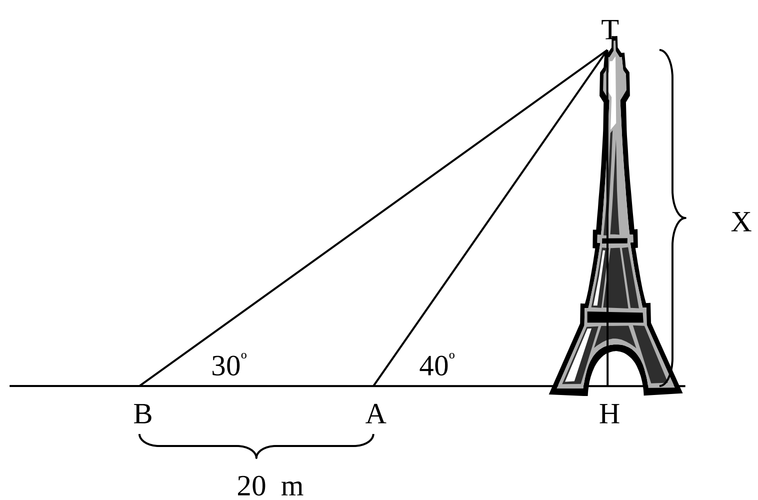
Ejercicio 19: La base de un triángulo isósceles mide 54 cm. y los ángulos en la base 36°. Halla la altura del triángulo y el perímetro.

Ejercicio 20: Desde un avión que vuela a 2.000 metros de altitud se observa el inicio de la pista de aterrizaje 22° por debajo de la línea horizontal de vuelo. ¿A qué distancia del avión está el inicio de la pista?



SISTEMA DE DOS TRIÁNGULOS

Ejemplo: Desde un patio se ve el extremo superior de una torre de luz levantando la vista un ángulo de 40°. Si nos alejamos en línea recta 20 metros sólo hay que levantar la vista 30° para ver la punta de la torre. ¿Cuál es la altura de esa torre?



Hay dos triángulos rectángulos, el AHT y BHT, pero en ninguno de los dos hay datos suficientes.

Llamamos x a la incógnita: x = $\overline{HT}$

En el triángulo AHT $\begin{cases} tg\ 40^\circ = \dfrac{X}{\overline{AH}} \\ 0{,}84 = \dfrac{X}{\overline{AH}} \quad (1) \end{cases}$

En el triángulo BHT $\begin{cases} tg\ 30^\circ = \dfrac{X}{\overline{BH}} \\ 0{,}58 = \dfrac{X}{20\ m + \overline{AH}} \qquad (2) \end{cases}$

Entre (1) y (2) tenemos un sistema de dos ecuaciones

$$0{,}84 = \frac{X}{\overline{AH}} \qquad\qquad 0{,}58 = \frac{X}{20 + \overline{AH}}$$

$$0{,}84\ .\ \overline{AH} = X \qquad\qquad 0{,}58.\left(20 + \overline{AH}\right) = X$$

Hemos despejado en las dos ecuaciones el valor de X, ahora igualamos:

$$\begin{aligned} 0{,}84\ .\overline{AH} &= 0{,}58.\left(20 + \overline{AH}\right) \\ 0{,}84\ .\overline{AH} &= 11{,}60 + 0{,}58.\overline{AH} \\ 0{,}84\ .\overline{AH} - 0{,}58\ .\overline{AH} &= 11{,}60 \\ 0{,}26\ .\overline{AH} &= 11{,}60 \\ \overline{AH} &= 11{,}60 \div 0{,}26 \\ \overline{AH} &= 44{,}62 \end{aligned}$$

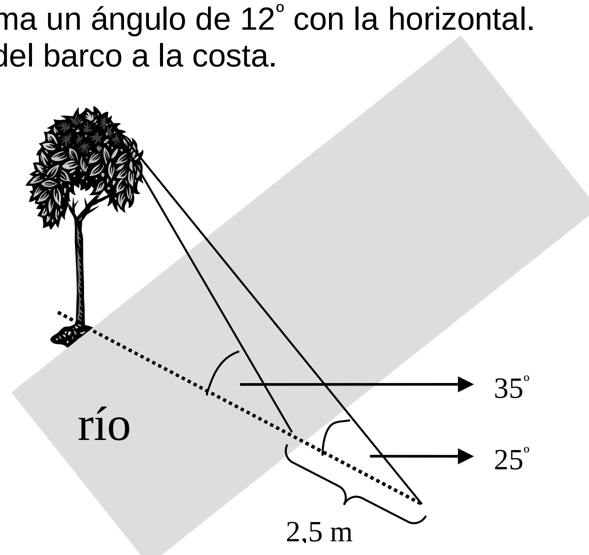
Para hallar X $\Rightarrow$ $0{,}84\ .\overline{AH} = x$

$$0{,}84\ .\ 44{,}62 = X$$

$$37{,}48 = X$$

<u>Ejercicio 21</u>: Desde un barco que está cerca de la costa se divisa un faro en lo alto del acantilado. El faro tiene una altura de 20 metros.
La recta que une al barco con el pie del faro forma un ángulo de 10° con la horizontal. La recta que une el barco con el extremo superior del faro forma un ángulo de 12° con la horizontal.
Determina la altura del acantilado y la distancia del barco a la costa.

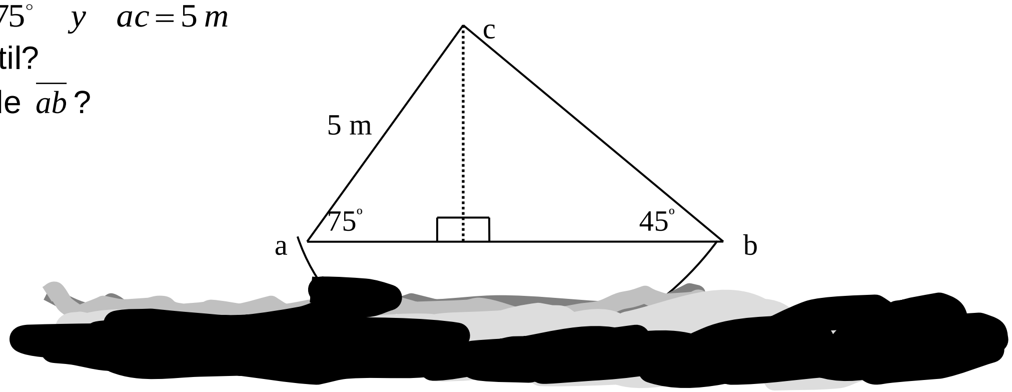
<u>Ejercicio 22</u>: Calcula la anchura del río a partir de los datos de la figura.



Ejercicio 23: La vela de un velero tiene la forma de la figura. La vertical punteada corresponde al mástil. Se conocen $\hat{a} = 75^\circ \quad y \quad \overline{ac} = 5\,m$

a) ¿Cuánto mide el mástil?

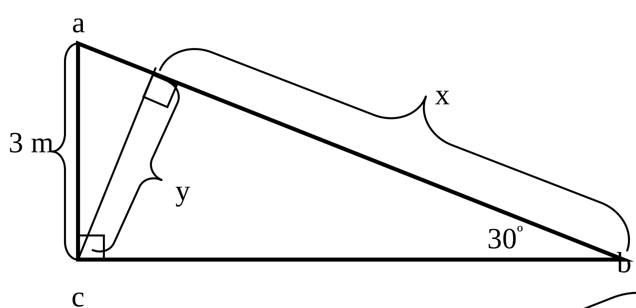
b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{ab}$?



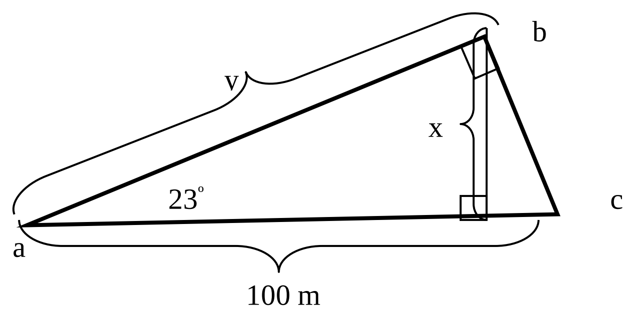
Ejercicio 24: La base mayor de un trapecio isósceles mide 30 cm., su altura 10 cm. y los lados forman un ángulo de 76° con la base mayor. Halla la base menor y el lado.

Ejercicio 25: Halla “x” e “y” en las siguientes figuras

a)



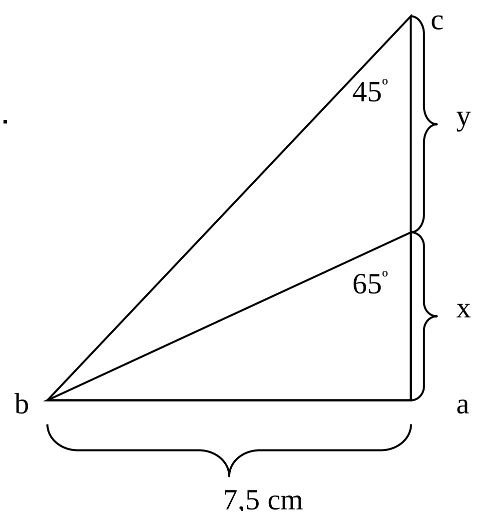
b)



Ejercicio 26: Desde un barco se ve la cima de una montaña de 1.200 metros de altitud, 5° por encima de la horizontal. El barco se acerca en línea recta hacia la montaña y, un poco después, ésta se ve 8° por encima del horizonte. ¿Qué distancia ha recorrido el barco?

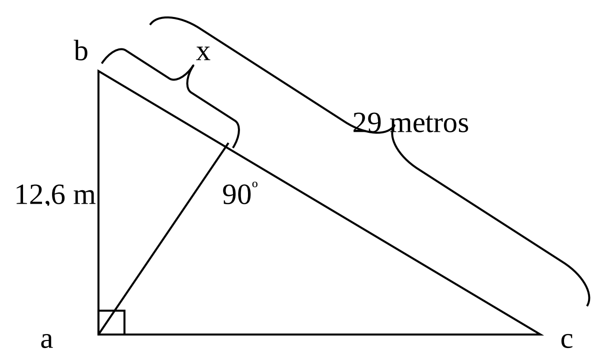
Ejercicio 27: Calcula el perímetro y la superficie de un rectángulo sabiendo que la diagonal mide 7,42 cm. y que el ángulo que ella determina con la base es igual a 54°.

Ejercicio 28: Calcula “x” e “y”.



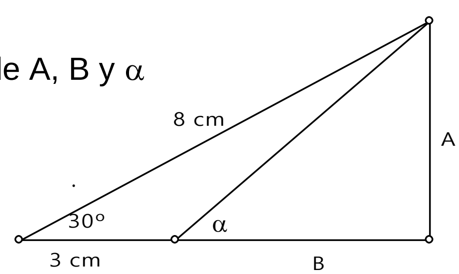
Ejercicio 29: Desde un balcón del primer piso de un edificio se ve un objeto en el suelo, ubicado a 7 metros de la pared, bajo un ángulo de depresión de 35° 42’. Desde un balcón del tercer piso que está sobre el anterior, se ve el mismo objeto bajo un ángulo de 58° 21’. ¿Cuál es la diferencia de altura entre ambos balcones?

Ejercicio 30: Determina el valor de “x” en la siguiente figura.



Ejercicio 31: Un rectángulo tiene 32 metros de base y 2.400 cm. de altura. Halla las medidas de los ángulos que forma una diagonal con los lados.

Ejercicio 32: Observa la figura y halla las medidas de A, B y α

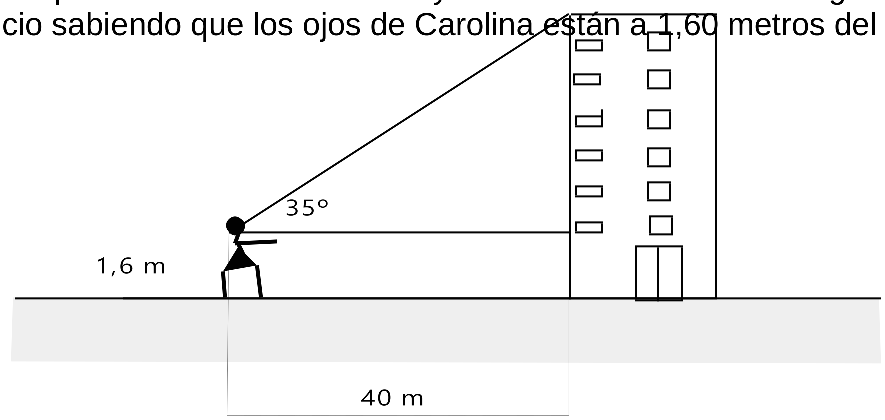


Ejercicio 33: Halla la altura de un poste sabiendo que la cuerda que lo sostiene al piso mide 15 metros y que forma un ángulo de 25º con éste.

Ejercicio 34: Una escalera de 4 metros se apoya sobre una pared, alcanzando una altura de 3 metros sobre ella.

a) ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso?
b) ¿Cuál es la distancia de la base de la escalera hasta la pared?

Ejercicio 35: Para calcular la altura de un edificio, Carolina se ubica a una distancia de 40 metros de éste. La línea de la visual del punto más alto del edificio y la horizontal forman un ángulo de 35º. Calcula la altura del edificio sabiendo que los ojos de Carolina están a 1,60 metros del piso.



Ejercicio 36: Se quiere trasladar una carga mediante una cinta transportadora, a una altura de 10 metros. ¿Cuál debe ser al ángulo de inclinación de la cinta si esta mide 30 metros?

Ejercicio 37: Desde lo alto de un árbol se tensan dos cables y se atan al piso, como se ve en la figura. El más alejado queda a 40 metros de la base del árbol. Calcula:

a) La altura del árbol
b) La longitud de ambos cables
c) La distancia, a nivel del piso, ente ambos cables.