GUIA Nº 1

Revisión de Conceptos

Parte Teórica

ÁLGEBRA:

DE LOS NÚMEROS A LAS LETRAS

Se suele pensar que el álgebra comienza cuando se empieza a utilizar letras para representar números. En realidad la utilización de letras en el ambiente matemático es muy vieja. Los griegos escribían los números mediante las letras de su alfabeto:

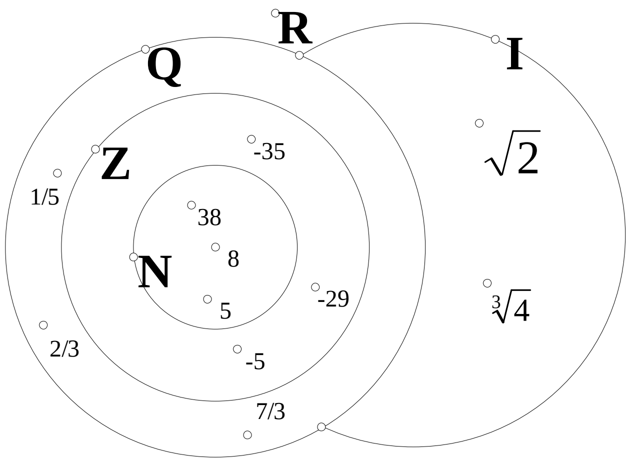
α (alfa) era 1
β (beta) era 2
γ (gama) era 3
δ (delta) era 4

La numeración romana también utilizaba letras: pero en ambos casos, cada letra representaba un número. El álgebra comienza, en realidad, cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números. Ese "cualquier" número se representa con una letra y se da, así, el paso de la aritmética, que se interesa por los números concretos, al álgebra.

El álgebra es, sobre todo, una invención de los árabes, y su expansión hacia Europa en el sigloXII, tuvo lugar gracias al trasvase de cultura que se desarrolló en la península Ibérica hacia este período
Hauwn al- Rashid, el sultán de Bagdad que aparece en "Las mil y una noches", fue un gran protector de las ciencias y de las letras, como también su hijo Al- Mamun. Durante el reinado de éste, en el siglo IX, vivió en Bagdad el mejor matemático de la época
Al - KHOWARIZMI, que escribió, hacia el año 825, una obra titulada Aljabr W' al mugabalah (ciencia de la restauración y oposición) y que constituía el primer tratado de Álgebra.

Los matemáticos vieron pronto la ventaja de representar un número desconocido por una letra o por otro signo, de este modo pueden formularse las relaciones que, por las condiciones del problema, el número desconocido tiene con otros números, y entonces pueden considerarse dichas relaciones.

CONJUNTOS NUMÉRICOS



PROPIEDADES DE LA POTENCIACION

Definición de potenciación: $a^b = c \Rightarrow \underbrace{a.a.a.a........a}_{b \quad veces} = c$

Propiedades:

- Cualquier base elevada al exponente cero da por resultado 1.
- Cero elevado a cualquier potencia da por resultado 0.
- Producto de potencias de igual base, los exponentes se suman. $a^x.a^y = a^{x+y}$
- División de potencias de igual base, los exponentes se restan. $a^x \div a^y = a^{x-y}$
- Potencia de otra potencia los exponentes se multiplican. $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad en la que hay, por lo menos, una incógnita. Siempre que se plantee una ecuación, debemos resolverla y luego comprobar si él o los valores hallados verifican la ecuación, es decir, si son solución de la ecuación

INECUACIONES

La inecuación es una desigualdad en la que aparecen uno o más elementos desconocidos, llamados incógnitas.

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Para resolver inecuaciones son válidos los mismos pasos que para resolver ecuaciones

- Suprimir paréntesis
- Quitar denominadores
- Pasar sumandos de un miembro a otro (está sumando, pasa dividiendo; está restando pasa sumando)
- Pasar factores o denominadores positivos de un miembro a otro (está multiplicando, pasa dividiendo; está dividiendo pasa multiplicando)

- La única diferencia es que, cuando la incógnita está multiplicada o dividida por un número negativo, se cambia el signo en los dos miembros y se invierte el sentido de la desigualdad.

Ejemplo:

$$-3.x \langle 11$$
$$3.\,x \rangle -11$$
$$x \rangle -\frac{11}{3}$$

INECUACIONES LINEALES

Llamamos inecuaciones lineales a las desigualdades del tipo: $ax+b\leq 0$

$ax+b<0$

$ax+b\geq 0$

$ax+b>0$

Por Ejemplo: Una furgoneta pesa 875 Kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 Kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

Peso de la furgoneta - peso de cuatro cajones no es menor que 415 Kg

875 - 4x ≥ 415

Resolvemos la inecuación
$$\begin{cases} 875-4x\geq 415 \\ -4x\geq 415-875 \\ -4x\geq -460 \\ x\leq -460\div(-4) \\ x\leq 115 \end{cases}$$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 Kg. Además, como se trata de un peso, obviamente $x>0$.

Entonces la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo (0; 115)

FUNCIÓN LINEAL

Llamamos función lineal a toda función cuya expresión sea de la forma: f(x) = m.x + b (con m y b perteneciente a los números reales)

El dominio de éstas funciones es R (El dominio de una función es el mayor conjunto donde está definida la función, vale decir donde se puede calcular la función). La representación gráfica de una función lineal es siempre una recta.

Recordemos algunos conceptos sobre función lineal

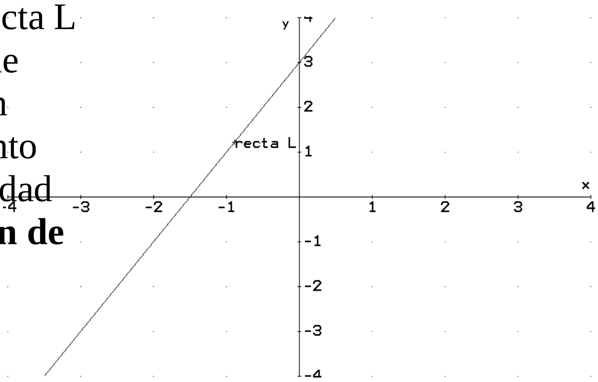
- Dada la funcion f(x) = mx + b es una función lineal, donde su gráfica es una recta

F(x) = m.x +b

Término lineal. El valor de "m" también se lo denomina pendiente

Término independiente también llamado **ordenada al origen**
B es la ordenada del puneo en el que la gráfica de la función corta al eje y

- La gráfica de la función f(x) = 2x+3 es la recta L
 Cada uno de los puntos de L tiene un par de Coordenadas (x;y) que verifican la ecuación Y= 2x+3. Las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a L no verifican esta igualdad Decimos que esta expresión es una **ecuación de la recta L**



 Por ejemplo: P = (1:5) $\in$ L $\Rightarrow$ 5 = 2.1 + 3
 Q = (1;2) $\notin$ L $\Rightarrow$ 2 $\neq$ 2.1 + 3

Toda función lineal está asociada a una recta en el plano cartesiano y viceversa, con excepción de las rectas perpendiculares al eje x, que no representan funciones

- Cuando la pendiente es **positiva**, la función lineal es **creciente** y cuando es **negativa**, la función lineal es **decreciente**
- La intersección con el eje y, se obtiene cuando se anula x, en las funciones lineales la intersección con el eje y coincide siempre con el término independiente
 $\cap$ eje y = (0; término independiente)
- La intersección con el eje x, se obtiene cuando se anula y, en las funciones lineales la intersección con el eje x, si existe, es única.
- Para que dos funciones lineales sean perpendiculares sus pendientes deben ser contrarias (distinto signo) y recíprocas.

 Ejemplo $\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{4}x + 5 \\ g(x) = \frac{4}{3}x - 6 \end{cases}$ son rectas perpendiculares

- Para que dos funciones lineales sean paralelas sus pendientes deben ser iguales

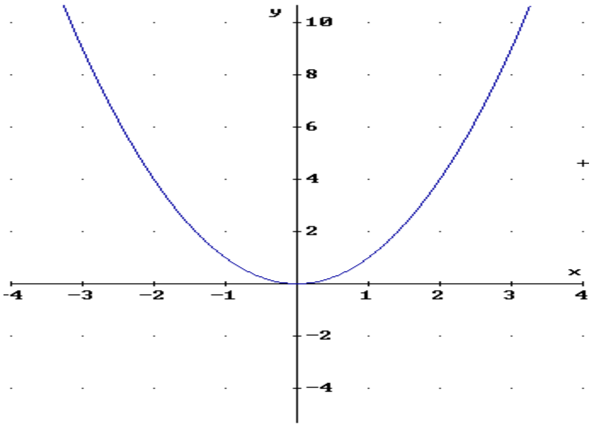
 Ejemplo $\begin{cases} f(x) = -\frac{4}{3}x + 8 \\ g(x) = -\frac{4}{3}x - 58 \end{cases}$ son rectas paralelas

CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

- El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es mayor que cero (o sea f(x) 〉 0). Gráficamente se entiende por conjunto de positividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por encima del eje de las x.

- El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es menor que cero (o sea f(x) 〈 0). Gráficamente se entiende por conjunto de negatividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por debajo del eje de las x.

FUNCIÓN   CUADRÁTICA



Dada la función f(x) = x^2.

Esta curva recibe el nombre de ***PARÁBOLA*** y la función recibe el nombre de ***CUADRÁTICA***, por tener un término en el cual la variable x, se encuentra elevada al cuadrado

La función cuadrática completa posee tres términos

F(x) = $ax^2 + bx + c$

Término independiente

Término lineal

Término cuadrático

* Si el valor de "a" es mayor a cero, es decir positivo, las ramas de la parábola se dirigen hacia arriba

* Si el valor de "a" es menor a cero, es decir negativo, las ramas de la parábola se dirigen hacia abajo

- **VERTICE**: Toda parábola tiene un valor mínimo o máximo al que se le llama VÉRTICE de la parábola. Los alrededores del vértice es la parte más significativa de la parábola. Por eso, conociendo el vértice, es más fácil la representación gráfica de cualquier parábola. Para hallar el vértice existe una fórmula

Vértice   (X_v ; Y_v)

$X_v = -\dfrac{b}{2a}$ f (x_v)

- **INTERSECCIONES CON LOS EJES:**

INTERSECCION CON EL EJE Y

La intersección de una función cuadrática con el eje y, es un punto cuya primer coordenada es siempre cero. Y la segunda coordenada coincide con el término independiente

Dada la función: f(x) = a.x^2 + b.x + c la intersección con el eje y es (0 ; c)

<u>INTERSECCION CON EL EJE X:</u>

La búsqueda de las intersecciones con el eje x también se llama ceros de la función o raíces.

La intersección con el eje x es un punto que se obtiene igualando la función a cero. Así:

$$F(x) = 0$$

Para resolver esta ecuación se necesita la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$.

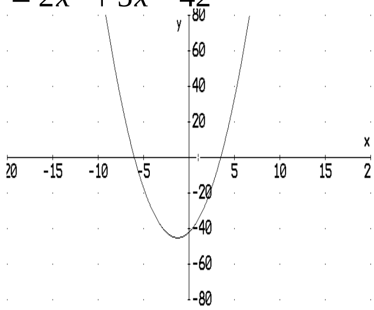
La cantidad que se encuentra debajo del radical $b^2 - 4.a.c$ que aparece en la fórmula general, recibe el nombre de **DISCRIMINANTE.** Y se los simboliza con la letra griega Δ(delta). Su análisis permite determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación.

Con el discriminante $b^2 - 4.a.c$ se pueden presentar tres situaciones: $\begin{cases} b^2 - 4.a.c \rangle 0 \\ b^2 - 4.a.c = 0 \\ b^2 - 4.a.c \langle 0 \end{cases}$

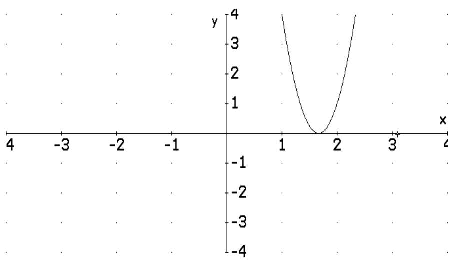
- Si $b^2 - 4.a.c \rangle 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales, intersecta al eje x en dos puntos
- Si $b^2 - 4.a.c = 0$ La ecuación tiene una única solución que es $x = -\dfrac{b}{2.a}$, interfecta al eje x en un solo punto, que además coincide con el valor de la x del vértice
- Si $b^2 - 4.a.c \langle 0$ la ecuación no tiene solución en los números reales, por lo que no interfecta al eje x.

EJEMPLO:

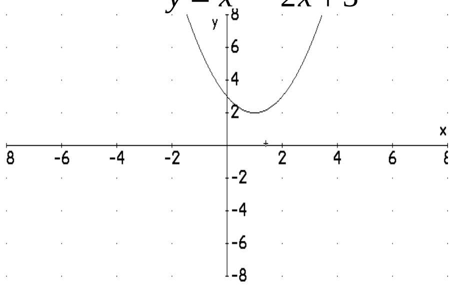
$y = 2x^2 + 5x - 42$



$y = 9x^2 - 30x + 25$



$y = x^2 - 2x + 3$



El discriminante es mayor por lo que la función dos raíces reales y su gráfica corta el eje x en dos puntos

El discriminante es igual a cero por lo que la función tiene una sola raíz real y su gráfica tiene un solo punto de contacto con el eje x

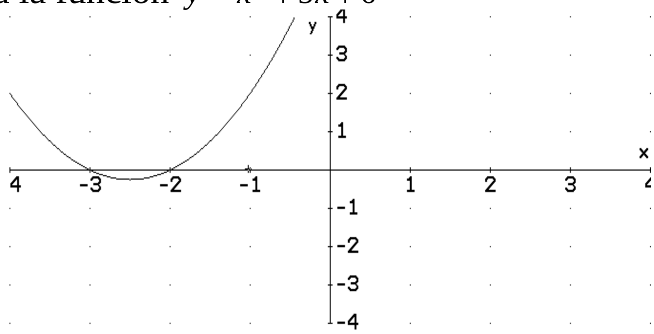
El discriminante es menor a cero que cero por lo que la función no tiene raíces tiene reales y su gráfica no tiene contacto con el eje x.

- **CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD**

  - El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es mayor que cero (o sea f(x) $\rangle$ 0). Gráficamente se entiende por conjunto de positividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por encima del eje de las x.
  - El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es menor que cero (o sea f(x) $\langle$ 0). Gráficamente se entiende por conjunto de negatividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por debajo del eje de las x

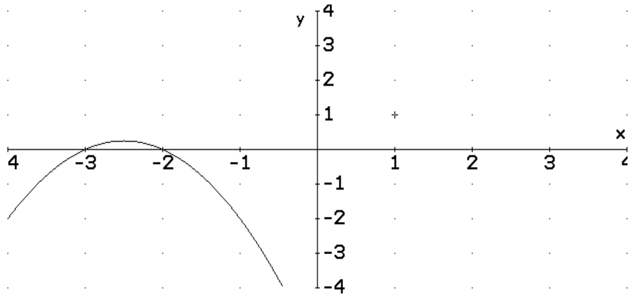
EJEMPLO 1:

Dada la función $y = x^2 + 5x + 6$



$C^+ = (-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$

$C^- = (-3;-2)$



EJEMPLO 2:

Dada la función $y = -x^2 - 5x - 6$

$C^+ = (-3;-2)$

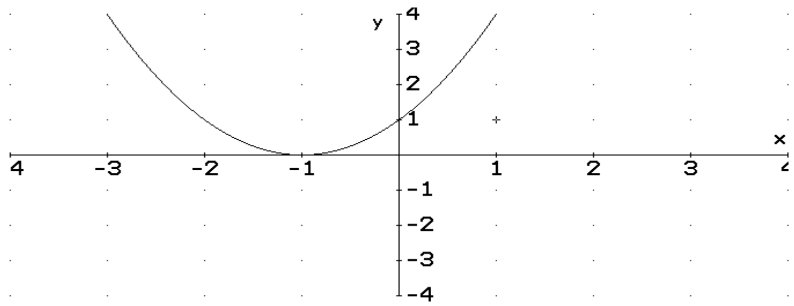
$C^- = (-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$

EJEMPLO 3:

Dada la función $y = x^2 + 2x + 1$

$C^+ = R$

$C^- = \{\ \}$



- **CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO**

De acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra creciente, crece, aumenta con el tiempo, con la temperatura, etc.
Es decir que: una función se dice creciente en un punto, cuando el valor que toma la función en ese punto es mayor que los que toma inmediatamente a la izquierda y menor que los que toma inmediatamente a la derecha; al decir inmediatamente a la izquierda y a la derecha se quiere indicar en un cierto entorno del punto, pues para valores de x más alejados, puede ocurrir que la condición no se cumpla.
Analizamos los ejemplos 1 , 2 y 3 cuyos gráfico se encuentran en el item anterior a éste

EJEMPLO 1:
Dada la función $y = x^2 + 5x + 6$ $\qquad Crece = (-2{,}5\,;+\infty) \quad y \quad Decrece = (-\infty\,;-2{,}5)$

EJEMPLO 2:
Dada la función $y = -x^2 - 5x - 6$ $\qquad Crece = (-\infty\,;-2{,}5) \quad y \quad Decrece = (-2{,}5\,;+\infty)$

EJEMPLO 3:
Dada la función $y = x^2 + 2x + 1$ $\qquad Crece = (-1\,;+\infty) \quad y \quad Decrece = (-\infty\,;-1)$

- **MAXIMOS Y MINIMOS**

Se dice que una función alcanza en un punto de su dominio, un máximo relativo o local cuando el valor de la
función en dicho punto es el mayor de los que toma en un entorno del mismo. Análogamente, se dice que una función alcanza un mínimo relativo o local cuando el valor que determina la función en dicho punto, es el menor de los valores que toma en un entorno del mismo. Estos máximos o mínimos se llaman relativos o locales, porque se consideran valores de la función, en puntos vecinos, próximos al punto considerado; en otros más alejados puede ocurrir que la función tome valores mayores que los máximos relativos y menores que los mínimos relativos, a éstos valores se lo llama máximos o mínimos absolutos.
Las funciones cuadráticas siempre presentan máximos o mínimos absolutos, nunca relativos, ya que no existe un valor mayor o menor que pueda tomar la función en cualquier otro punto considerado. Estos valores máximos o mínimos absolutos, en las funciones cuadráticas siempre coinciden con el vértice.

Así teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, analizamos las situaciones

EJEMPLO 1:
Dada la función $y = x^2 + 5x + 6$ En x = -2,5 la función posee un mínimo absoluto

EJEMPLO 2:

Dada la función $y=-x^2-5x-6$ En x = -2,5 la función posee un máximo absoluto

EJEMPLO 3:

Dada la función $y=x^2+2x+1$ En x = -1 la función posee un mínimo absoluto

Muchas veces se presenta en la resolución de un problema, la necesidad de encontrar un valor máximo o mínimo que sea solución de la situación planteada.
En muchos de los casos en que una función cuadrática es la interpretación matemática de la situación real, estas soluciones se encuentran identificando el vértice de la parábola

- **EJE DE SIMETRÍA**

Cada parábola presenta un eje de simetría vertical y, sobre el, se encuentra el vértice que es el punto en el que la curva pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. El eje de simetría es $x=x_v=-\frac{b}{2.a}$

- **CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Para graficar la función $f(x)=x^2+2x-8$, podemos proceder así:

- Hallamos sus raíces aplicando la fórmula : $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-8)}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}X_1=2\\X_2=-4\end{cases}$$

Por lo que las **intersecciones con el eje x** son: (2 ; 0) y (-4 ; 0)

- **Intersección con el eje y** =(0 ; Término independiente) $\Rightarrow \cap$ eje y = (0 ; -8)
- Calculamos la ecuación del **eje de simetría** que pasa por la abscisa del vértice $x=x_v=-\frac{b}{2.a}$, así

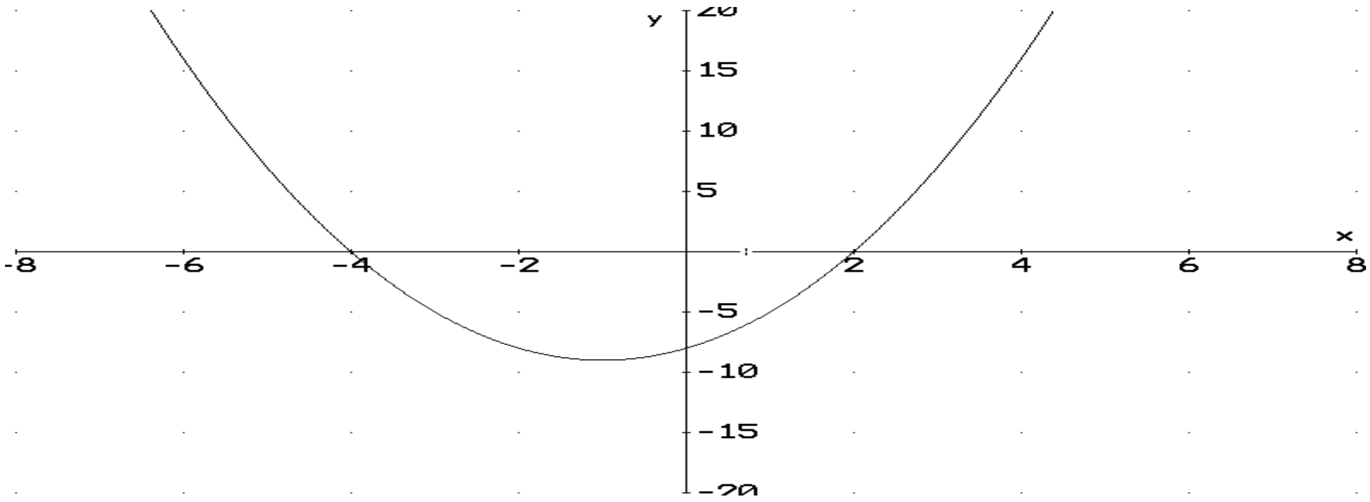
$$x=-\frac{2}{2.1}=-\frac{2}{2}=-1$$

- Calculamos el **vértice** $x_v=-1$

$$y_v=(-1)^2+2.(-1)-8=1-2-8=-9$$

$$vértice=(-1;-9)$$

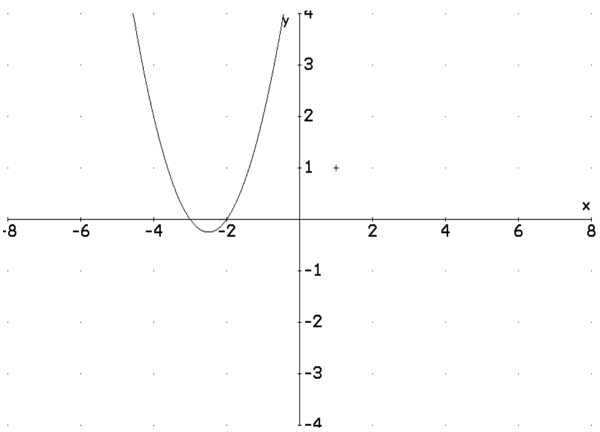
➢ Marcamos los puntos que obtuvimos y trazamos la gráfica aproximada



- **<u>CONCAVIDAD HACIA ARRIBA O HACIA ABAJO</u>**

Al hablar de **concavidad** de acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra, llamamos cóncavo cuando hablamos de una superficie curva hacia adentro y llamamos convexo cuando hablamos de una superficie curva hacia fuera. En matemática un gráfico de una función es cóncavo o con concavidad hacia arriba cuando se presenta como en el ejemplo a continuación.

Las funciones cuadráticas son o cóncavas o convexas, no pueden poseer intervalos de convexidad y concavidad



Y decimos que es **convexo** o bien con concavidad hacia abajo, cuando es como muestra el ejemplo siguiente