Profesora: Sandra Redaelli

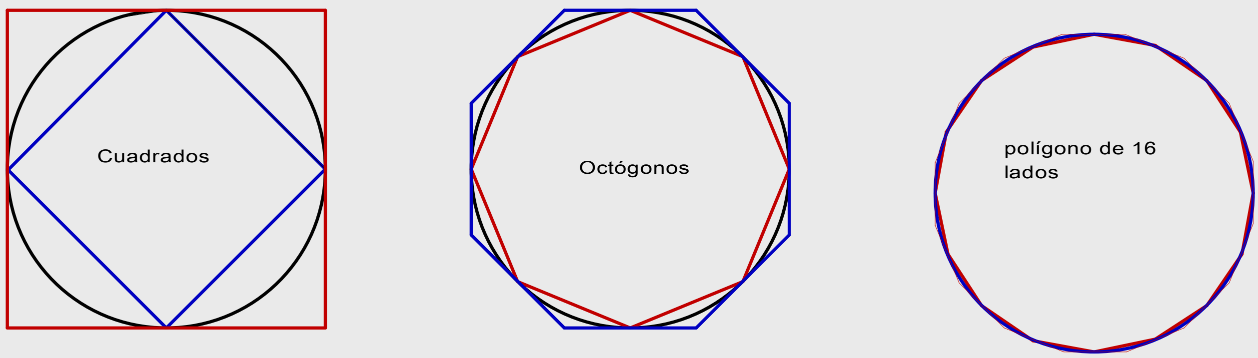
GUIA Nº 8

Integrales

Parte Teórica

Un poco de Historia:

Los griegos , en el siglo III a. J. C., hicieron los primeros esbozos del cálculo integral incluso se puede
decir con toda justicia, que su fundamentación del cálculo de áreas y volúmenes no fue superada en
rigor matemático hasta bien entrado el siglo XIX.
Su interés se centró sobre todo en el cálculo de áreas y volúmenes de las figuras y los cuerpos geométricos que más manejaban, por ejemplo del círculo y de la esfera, conos, etc. Usaron para calcular el área del círculo una sucesión de polígonos regulares inscriptos cuyas áreas ya conocían (por ejemplo, cuadrado, octógono, etc.) y otra de los mismos polígonos regulares inscriptos, logrando así una aproximación tan perfecta como deseaban del área buscada.



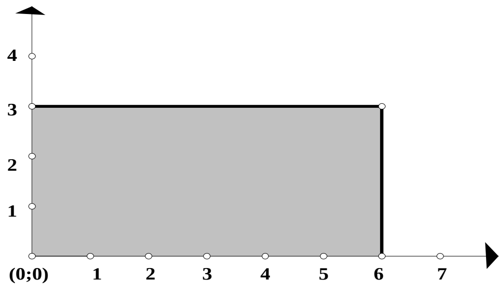
Como ves en la ilustración, cuántos más lados tienen los polígonos, mayor es la aproximación de su área a la del círculo.
Se ha dicho que lo que a los griegos les faltó, en particular a Apolonio de Perga, un gran genio en geometría, no fue riquezas de ideas y de métodos, sino abundancia de problemas generales que hubieran podido estimular el desarrollo de éstos métodos en otras direcciones distintas. Los griegos tenían una estima extraordinaria de las curvas más simples, como la circunferencia, la elipse, la parábola, … y dedicaron al estudio casi todas sus energías.
El gran avance del cálculo integral tuvo lugar en el siglo XVII cuando se observó que la derivada de la función que expresa el área entre una curva y = f(x) y el eje x vale precisamente f(x). Esto se lo suele llamar el *teorema fundamental del cálculo*. Esta idea proporcionaba un método muy general para hallar el área y con él un sinfín de aplicaciones a muchos campos de la ciencia.

LA INTEGRACIÓN SE ADELANTÓ EN MUCHO A LA DERIVACIÓN

Aunque hoy en día se suele presentar el estudio de la derivada antes que el de la integral de una función, lo cierto es que la integral es anterior a la derivada en más de 18 siglos.
Arquímedes, en el siglo III a. J. C., calculó el área limitada por un segmento de parábola mediante un procedimiento muy ingenioso, parecido a los utilizados posteriormente en el cálculo integral. Resolvió, además, otros muchos problemas similares. Pero como la matemática griega fue un tanto estática y así se conservó hasta el siglo XVII, no se elaboró bien el concepto de función y así no se les ocurrió ni a los griegos ni a los matemáticos posteriores pensar en la derivada.
Hasta el siglo XVIII no se pusieron ambos conceptos en conexión. Entonces fue cuando Barrow, maestro de Newton en Cambridge, se dio cuenta, a su modo, de que la derivada de la función que nos da el área bajo una curva es precisamente la función misma que representa la curva.
Esto, se conoce como regla de Barrow y también como *teorema fundamental del cálculo*, es verdaderamente una de las claves del análisis matemático.

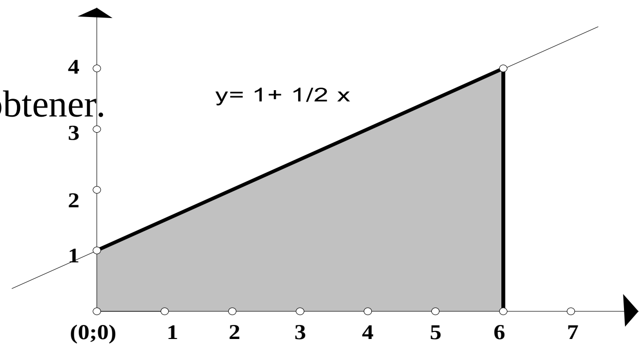
AREA BAJO UNA CURVA

- Esta figura es un rectángulo

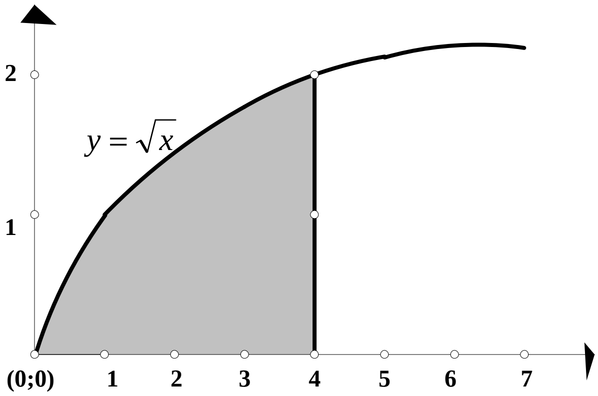


Su área es muy fácil de calcular

- Esta otra es un trapecio.
 También su área nos resulta sencilla de obtener.

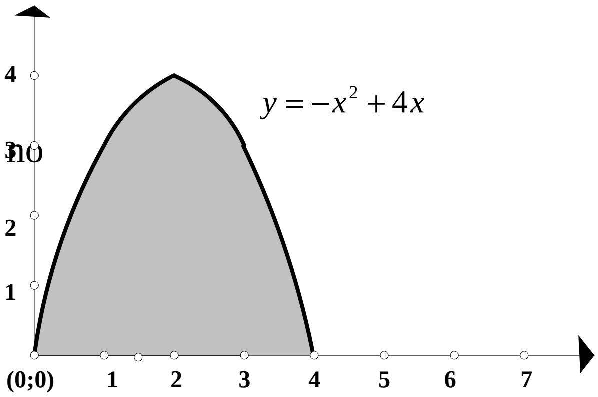


❖ Sin embargo esta curva



❖ Y esta otra

Encierran áreas para cuyo cálculo no conocemos ninguna fórmula.

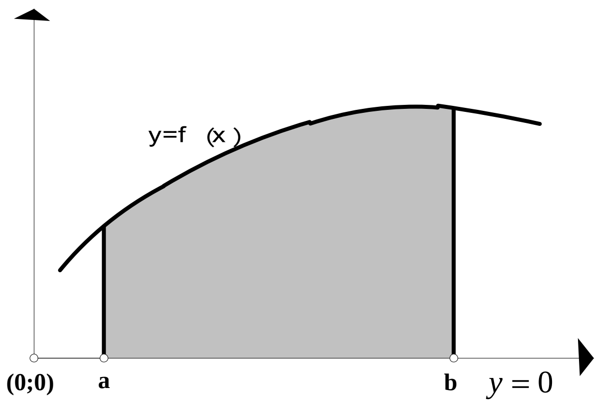


Pretendemos calcularla

<u>PARA EMPEZAR, ALGO DE NOMENCLATURA</u>:

A lo largo de esta práctica, vamos a calcular, en muchas ocasiones, el área contenida entre el eje x, la gráfica de una función y= f(x) y dos segmentos verticales por a y b. A esa área la llamaremos

$$\int_a^b [f(x)-0]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



<u>**Se lee**</u>: ***integral entre a y b de f(x)***

Para lograr el cálculo de una integral del estilo de los ejemplos anteriores llamada integral definida, relacionada con el valor del área limitada por curvas, debemos primero realizar algunos cálculos con integrales indefinidas

INTEGRAL INDEFINIDA

La derivación y la integración son operaciones inversas. Teniendo en cuenta esto, vamos realizar algunas observaciones:

OBSERVACIÓN 1: Dada $f'(x) = x^2$ podemos apreciar que las posibles fórmulas de f(x) son:

- $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ ya que la derivada de f(x) es $f'(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ ya que la derivada de f(x) es $f'(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{8}$ ya que la derivada de f(x) es $f'(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 \pm un \;\; número$ ya que la derivada de f(x) es $f'(x) = x^2$

Generalizando, el conjunto de probables antiderivadas de f' está expresado por la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \qquad \text{pues} \quad f'(x) = x^2$$

donde C puede tomar cualquier valor real generando de éste modo, cada una de las expresiones anteriores.

El proceso de encontrar las antiderivadas de una función se llama: INTEGRACIÓN

NOTACIÓN:

Al conjunto de todas las antiderivadas de una función cualquiera g(x) se lo anota de la siguiente manera:

Lenguaje simbólico	Lenguaje coloquial
$\int g(x)\, dx =$	Integral indefinida de la función g(x)

Luego:

$$\boxed{\int g(x)\, dx = \mathrm{G(x) + C}}$$

“C” es la constante de integración y puede tomar cualquier valor real

Reglas de integración

Suma de funciones

La primitiva (o antiderivada) de una suma de funciones es la suma de las primitivas

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Ejemplo:

$$\int (x^2 + x)dx = \int x^2 dx + \int xdx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

Producto de una constante por una función

La primitiva de un número “a” por una función f(x) es el producto del número “a” por la primitiva de f(x)

$$\int [a.f(x)]dx = a.\int f(x)dx =$$

Ejemplo:

$$\int 2x^2 dx = 2.\int x^2 dx = 2.\frac{x^3}{3} + C$$

TABLA DE LAS PRIMITIVAS (O ANTIDERIVADAS MÁS USUALES)

$$\int a\ dx = a.x + C$$

$$\int 0\ dx = 0.x + C = 0$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln x + C$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\ dx = senx + C$$

$$\int senx\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x\ dx = tg\ x + C$$

$$\int \cos ec^2\ x\ dx = -\cot g\ x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ senx + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x + C$$

INTEGRAL DEFINIDA:

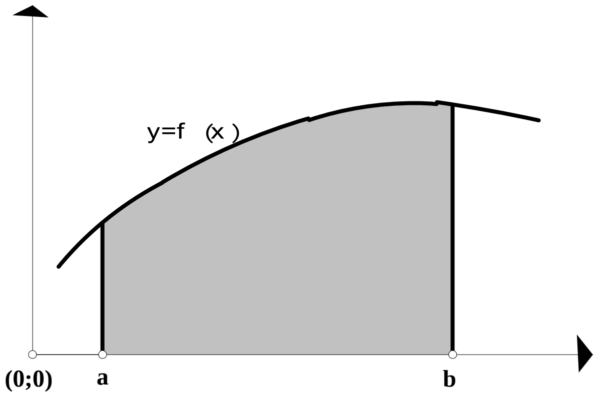
¿Podremos encontrar alguna regla que nos permita calcular, de forma cómoda, áreas bajo una curva?

Es decir, supongamos tener la función f(x) continua en el intervalo $[a;b]$ y querer calcular el área encerrada debajo de la curva.
Esto como ya lo indicamos, se obtiene con:

$$\int_a^b [f(x)-0]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \;=}$$



REGLA DE BARROW:

El cálculo del área entre a y b bajo una función continua f $\Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx =$ se obtienen mediante los siguientes pasos:

1. Obtenemos una función G(x) cuya derivada sea f(x)
2. Calculamos los valores de esa función en a y en b. $\Rightarrow$ G(a) y G(b)
3. El área buscada es $\int_b^a f(x)\,dx =$ G (b) - G (a)

Esta regla nos permite obtener con mucha comodidad el área bajo una curva de ecuación y = f(x) siempre que sepamos encontrar una función G(x) cuya derivada sea f(x). A G(x) se la llama **primitiva** de f(x).

CALCULO DE REGIONES LIMITADAS POR CURVAS

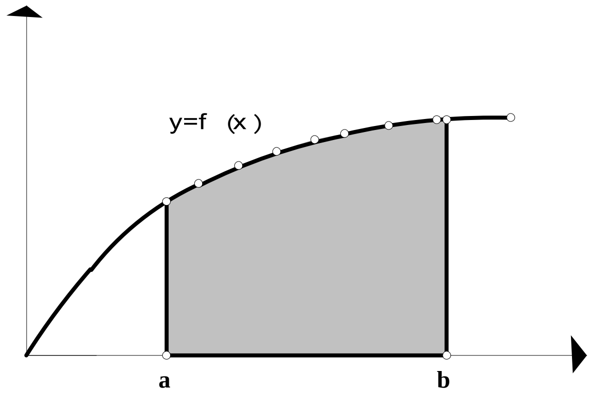
Dadas las funciones f(x) y g(x). Para calcular el área entre dos curvas se utiliza la siguiente fórmula

$$\int_b^a [f(x)-g(x)]\,dx =$$

Veamos algunos ejemplos

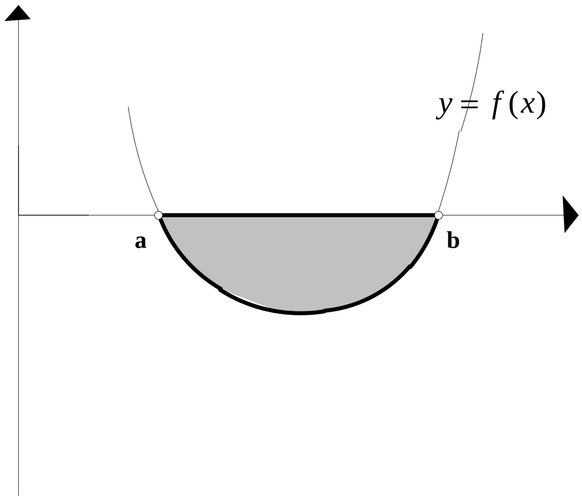
- **Ejemplo 1**:

$$\int_b^a [f(x) - g(x)]\ dx =$$
$$= \int_b^a [f(x) - 0]\ dx =$$
$$= \int_b^a f(x)\ dx =$$



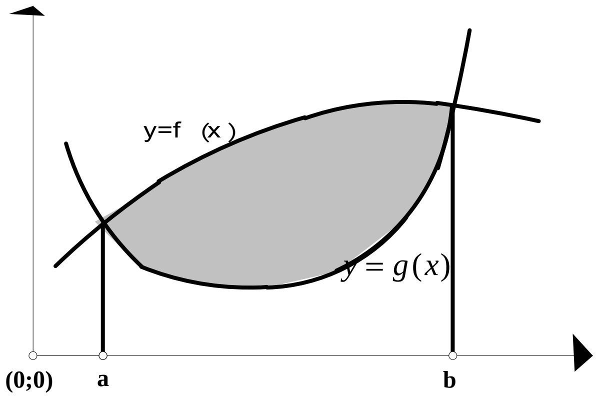
- **Ejemplo 2**.

$$\int_b^a [f(x) - g(x)]\ dx =$$
$$= \int_b^a [0 - f(x)]\ dx =$$
$$= \int_b^a - f(x)\ dx =$$
$$= -\int_b^a f(x)\ dx$$



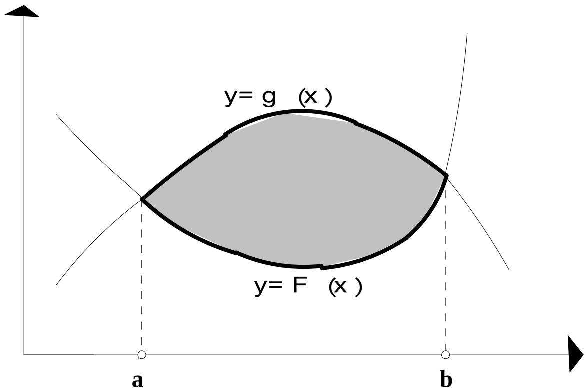
- **Ejemplo 3**.

$$\int_b^a [f(x) - g(x)]\ dx =$$



➢ Ejemplo 4:.

$$\int_b^a [g(x) - f(x)] \, dx =$$



➢ Ejemplo 5:

$$\int_a^0 [0 - f(x)] \, dx + \int_0^b [f(x) - 0] \, dx =$$
$$= \int_a^0 [- f(x)] \, dx + \int_0^b [f(x)] \, dx =$$
$$= -\int_a^0 f(x) \, dx + \int_0^b f(x) \, dx$$