GUIA Nº 5

Funciones

Parte Teórica

FUNCIÓN LINEAL

Llamamos función lineal a toda función cuya expresión sea de la forma: f(x) = m.x + b (con m y b perteneciente a los números reales)
El dominio de éstas funciones es R (El dominio de una función es el mayor conjunto donde está definida la función, vale decir donde se puede calcular la función). La representación gráfica de una función lineal es siempre una recta.

Recordemos algunos conceptos sobre función lineal

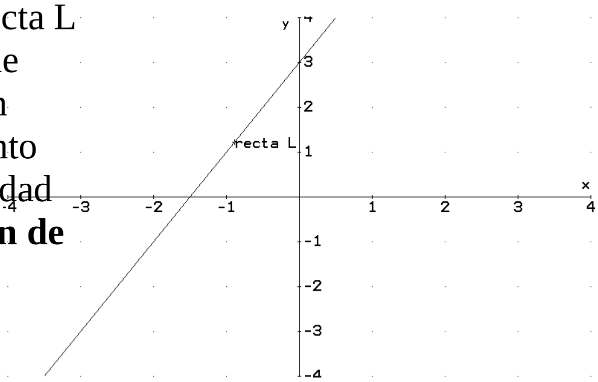
- Dada la funcion f(x) = mx + b es una función lineal, donde su gráfica es una recta

F(x) = m.x +b

Término lineal. El valor de "m" también se lo denomina pendiente

Término independiente también llamado **ordenada al origen** B es la ordenada del puneo en el que la gráfica de la función corta al eje y

- La gráfica de la función f(x) = 2x+3 es la recta L
  Cada uno de los puntos de L tiene un par de Coordenadas (x;y) que verifican la ecuación Y= 2x+3. Las coordenadas de cualquier punto que no pertenece a L no verifican esta igualdad Decimos que esta expresión es una **ecuación de la recta L**



Por ejemplo: P = (1:5) $\in$ L $\Rightarrow$ 5 = 2.1 + 3
Q = (1;2) $\notin$ L $\Rightarrow$ 2 $\neq$ 2.1 + 3

Toda función lineal está asociada a una recta en el plano cartesiano y viceversa, con excepción de las rectas perpendiculares al eje x, que no representan funciones

- Cuando la pendiente es **positiva**, la función lineal es **creciente** y cuando es **negativa**, la función lineal es **decreciente**
- La intersección con el eje y, se obtiene cuando se anula x, en las funciones lineales la intersección con el eje y coincide siempre con el término independiente

$\cap$ eje y = (0; término independiente)

- La intersección con el eje x, se obtiene cuando se anula y, en las funciones lineales la intersección con el eje x, si existe, es única.
- Para que dos funciones lineales sean perpendiculares sus pendientes deben ser contrarias (distinto signo) y recíprocas.

Ejemplo $\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{4}x + 5 \\ g(x) = \frac{4}{3}x - 6 \end{cases}$ son rectas perpendiculares

- Para que dos funciones lineales sean paralelas sus pendientes deben ser iguales

Ejemplo $\begin{cases} f(x) = -\frac{4}{3}x + 8 \\ g(x) = -\frac{4}{3}x - 58 \end{cases}$ son rectas paralelas

CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

- El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es mayor que cero (o sea f(x) 〉 0). Gráficamente se entiende por conjunto de positividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por encima del eje de las x.

- El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es menor que cero (o sea f(x) 〈 0). Gráficamente se entiende por conjunto de negatividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por debajo del eje de las x.

DETERMINAR LA PENDIENTE DE UNA RECTA CONOCIENDO DOS PUNTOS

La pendiente de una recta es un número asociado a su inclinación. Si conocemos las coordenadas de dos puntos de una recta, podemos calcular su pendiente mediante la siguiente fórmula.

$$\left.\begin{array}{r} Si\ P = (x_1; y_1) \\ Q = (x_2; y_2) \end{array}\right\} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:

Sean dos puntos $A = (x_1; y_1) \quad y \quad B = (x_2; y_2)$ cuya distancia $d = \overline{AB}$ se desea determinar. Trazando $\overline{AC} \perp \overline{BM}$, el triángulo ACB es rectángulo en C. Aplicando el Teorema de Pitágoras es:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2}$$

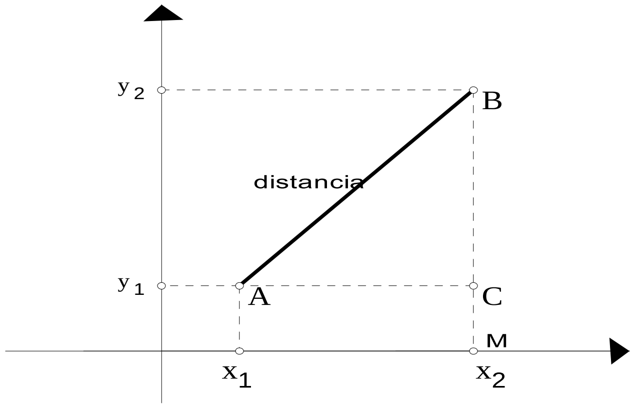
Siendo $d = \overline{AB}$

$\overline{AC} = x_2 - x_1$

y $\overline{CB} = y_2 - y_1$

reemplazando:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



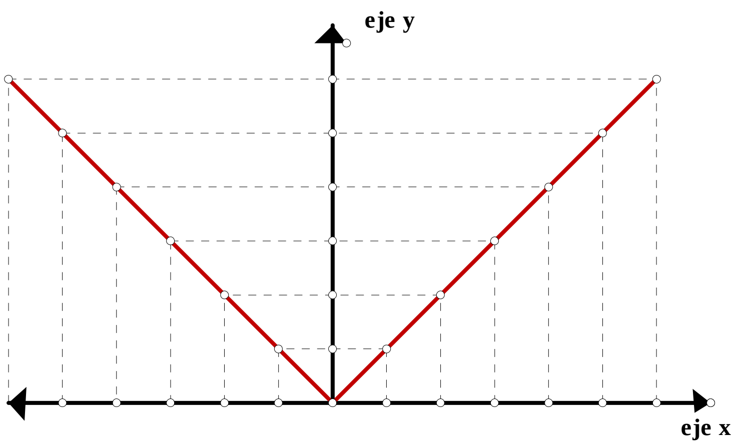
FUNCION VALOR ABSOLUTO o MÓDULO

Recordemos que el **valor absoluto** o **módulo** de un número real cualquiera **x**, que simbolizamos $|x|$, es **la distancia entre x y cero** en la recta numérica. Como es una distancia el valor absoluto NUNCA puede ser negativo, es decir que: $|x| \geq 0$.

Así: $|5| = 5$ $\quad |-5| = 5$

Si consideramos la **función valor absoluto** *para todos los números reales***,** podemos escribir su fórmula así

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



INECUACIONES LINEALES EN EL PLANO

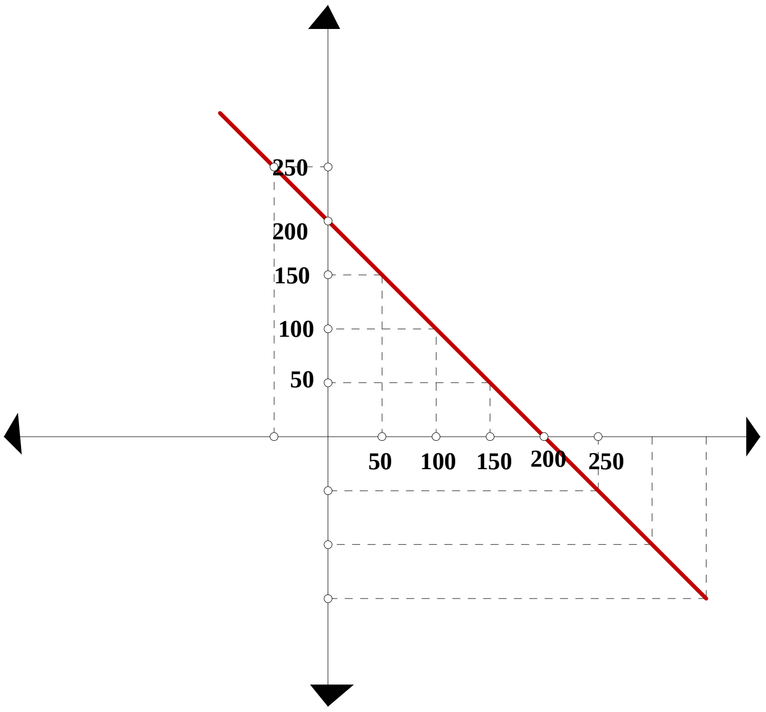
Máximo: 200 Kg
Capacidad: 2 personas

En el ascensor de un edificio antiguo se puede leer este cartel

Si simbolizamos con las variables **x** e **y** los posibles pesos de dos personas que suben juntas en ese ascensor, podemos plantear la siguiente inecuación: $x + y \leq 200$

Despejemos la variable y: $y \leq 200 - x$

Trazamos la recta $y = 200 - x$ en el sistema de ejes cartesianos. Los puntos de esa recta son las posibles combinaciones de los pesos de las dos personas que, juntas, pesan 200 Kg.



Podemos observar que *la recta divide al plano en dos semiplanos*

Para averiguar a qué semiplano pertenecen los puntos que buscamos, elegimos un punto cualquiera del plano que no pertenezca a la recta.

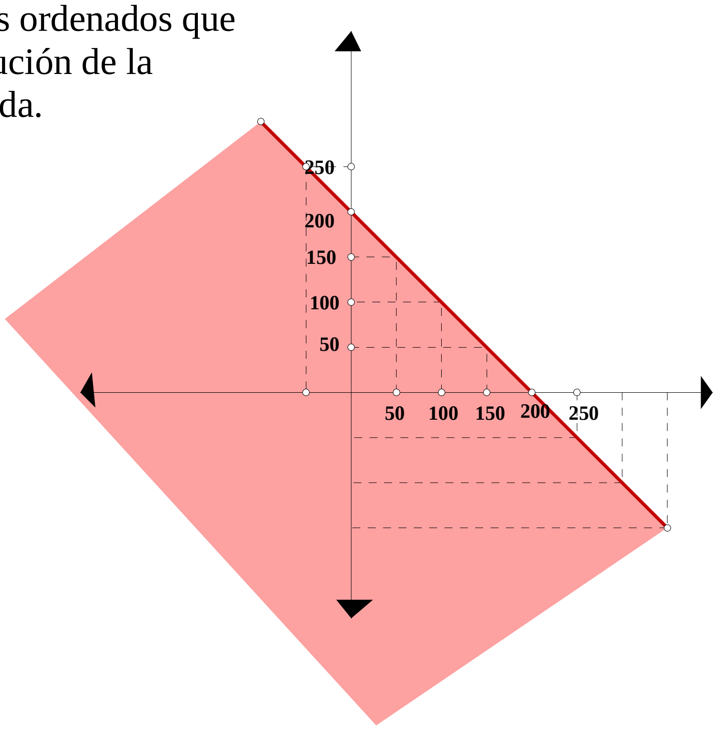
Por ejemplo: (0,50)

Verificamos si (0;50) satisface a la inecuación $y \leq 200 - x$ para ello reemplazamos a la x por 0 y a la y por 50. Así:

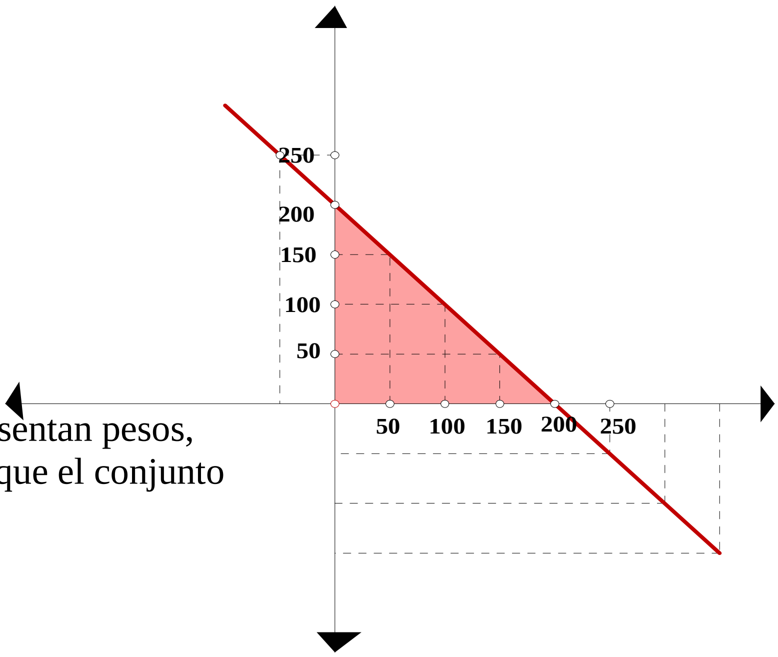
$$50 \leq 200 - 0$$

$$50 \leq 200$$

esto es verdadero . Entonces el punto (0;50) es solución, por lo que coloreamos toda la región a la que pertenece el punto tomado. En la región coloreada están los pares ordenados que forman la solución de la inecuación dada.



Pero como las variables “x” e “y” representan pesos, ambas toman valores positivos. Por lo que el conjunto solución de esta situación es:



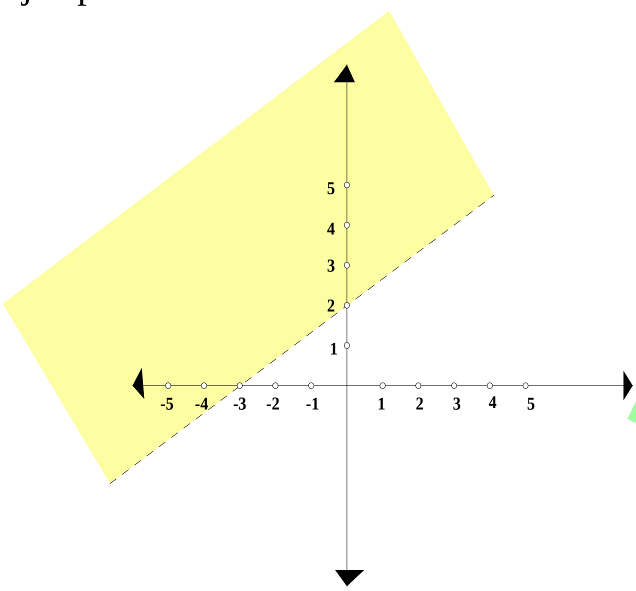
CONCLUSION

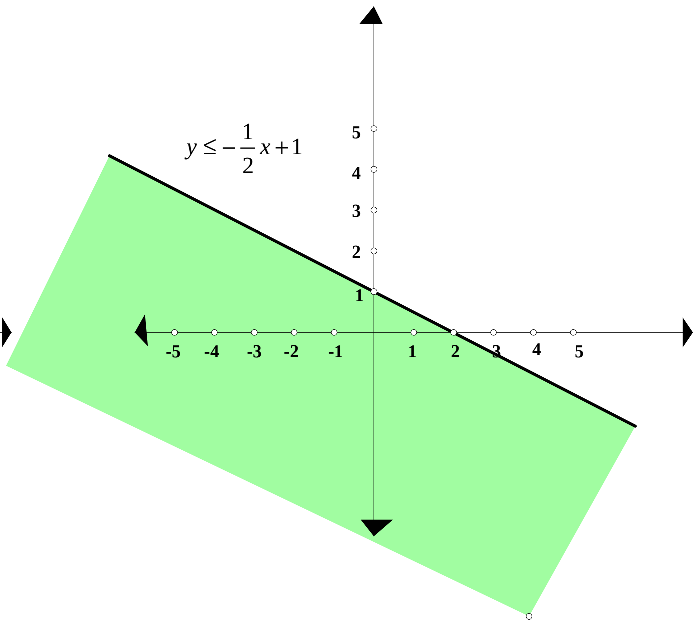
Cuando trabajamos en el plano, el conjunto solución de una inecuación lineal es un semiplano. Para determinar cuál es, probamos con un punto.

Si la inecuación es de la forma: $y < ax + b$ o $y > ax + b$ el conjunto solución es uno de los dos semiplanos determinados por la recta y = ax +b, sin incluir esta recta borde (la marcamos con una linea punteada)

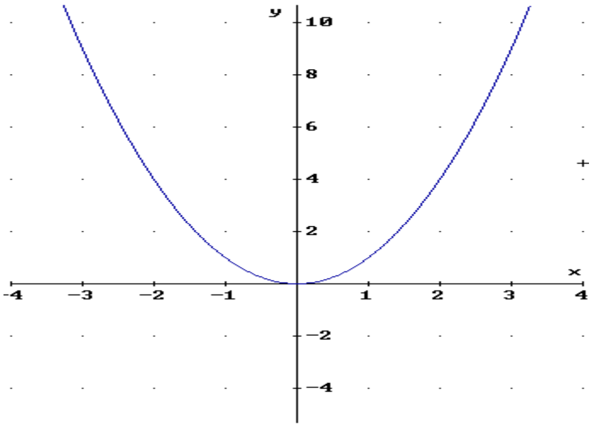
Si la inecuación es de la forma: $y \leq ax + b$ o $y \geq ax + b$ se incluye la recta borde.

Ejemplos





FUNCIÓN CUADRÁTICA



Dada la función f(x) = x^2.

Esta curva recibe el nombre de ***PARÁBOLA*** y la función recibe el nombre de ***CUADRÁTICA***, por tener un término en el cual la variable x, se encuentra elevada al cuadrado

La función cuadrática completa posee tres términos

F(x) = $ax^2 + bx + c$

Término independiente

Término lineal

Término cuadrático

* Si el valor de "a" es mayor a cero, es decir positivo, las ramas de la parábola se dirigen hacia arriba

* Si el valor de "a" es menor a cero, es decir negativo, las ramas de la parábola se dirigen hacia abajo

- **VERTICE**: Toda parábola tiene un valor mínimo o máximo al que se le llama VÉRTICE de la parábola. Los alrededores del vértice es la parte más significativa de la parábola. Por eso, conociendo el vértice, es más fácil la representación gráfica de cualquier parábola. Para hallar el vértice existe una fórmula

Vértice (X_v ; Y_v)

$$X_v = -\frac{b}{2a}$$

f (x_v)

- **INTERSECCIONES CON LOS EJES:**

INTERSECCION CON EL EJE Y

La intersección de una función cuadrática con el eje y, es un punto cuya primer coordenada es siempre cero. Y la segunda coordenada coincide con el término independiente

Dada la función: $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ la intersección con el eje y es $(0 ; c)$

INTERSECCION CON EL EJE X:

La búsqueda de las intersecciones con el eje x también se llama ceros de la función o raíces.

La intersección con el eje x es un punto que se obtiene igualando la función a cero. Así:

$$F(x) = 0$$

Para resolver esta ecuación se necesita la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$.

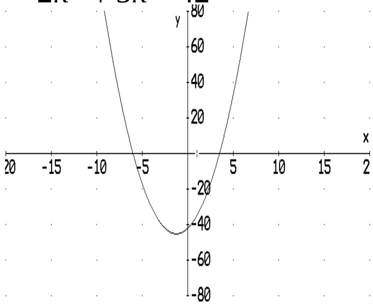
La cantidad que se encuentra debajo del radical $b^2 - 4.a.c$ que aparece en la fórmula general, recibe el nombre de **DISCRIMINANTE.** Y se los simboliza con la letra griega Δ(delta). Su análisis permite determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación.

Con el discriminante $b^2 - 4.a.c$ se pueden presentar tres situaciones: $\begin{cases} b^2 - 4.a.c \rangle 0 \\ b^2 - 4.a.c = 0 \\ b^2 - 4.a.c \langle 0 \end{cases}$

- Si $b^2 - 4.a.c \rangle 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales, intersecta al eje x en dos puntos
- Si $b^2 - 4.a.c = 0$ La ecuación tiene una única solución que es $x = -\frac{b}{2.a}$, interfecta al eje x en un solo punto, que además coincide con el valor de la x del vértice
- Si $b^2 - 4.a.c \langle 0$ la ecuación no tiene solución en los números reales, por lo que no interfecta al eje x.

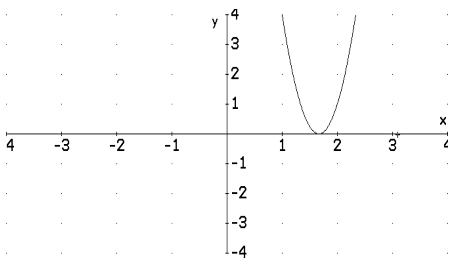
EJEMPLO:

$y = 2x^2 + 5x - 42$



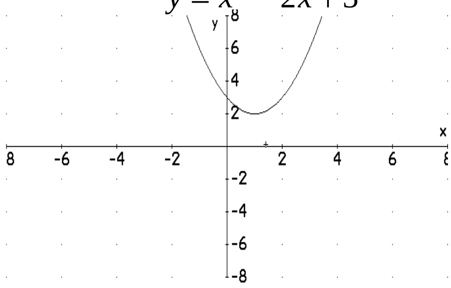
El discriminante es mayor cero por lo que la función tiene dos raíces reales y su gráfica corta el eje x en dos puntos

$y = 9x^2 - 30x + 25$



El discriminante es igual a cero por lo que la función tiene una sola raíz real y su gráfica tiene un solo punto de contacto con el eje x

$y = x^2 - 2x + 3$



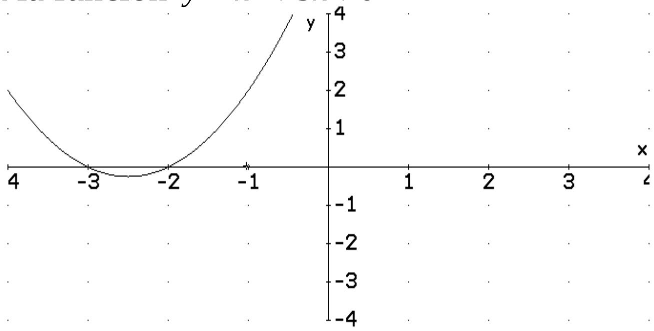
El discriminante es menor a cero que por lo que la función no tiene raíces reales y su gráfica no tiene contacto con el eje x.

• CONJUNTO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

- El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es mayor que cero (o sea $f(x) \rangle 0$). Gráficamente se entiende por conjunto de positividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por encima del eje de las x.
- El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de puntos en que el valor de la función es menor que cero (o sea $f(x) \langle 0$). Gráficamente se entiende por conjunto de negatividad al intervalo determinado cuando la gráfica se encuentra por debajo del eje de las x

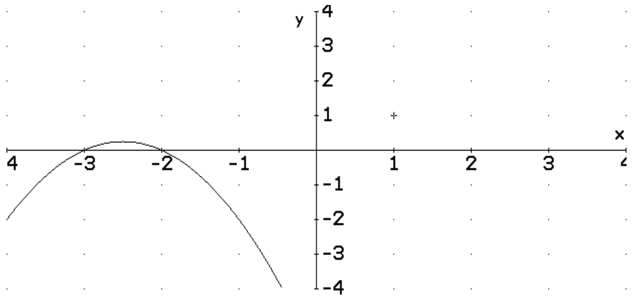
EJEMPLO 1:

Dada la función $y = x^2 + 5x + 6$



$C^+ = (-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$

$C^- = (-3;-2)$



EJEMPLO 2:

Dada la función $y = -x^2 - 5x - 6$

$C^+ = (-3;-2)$

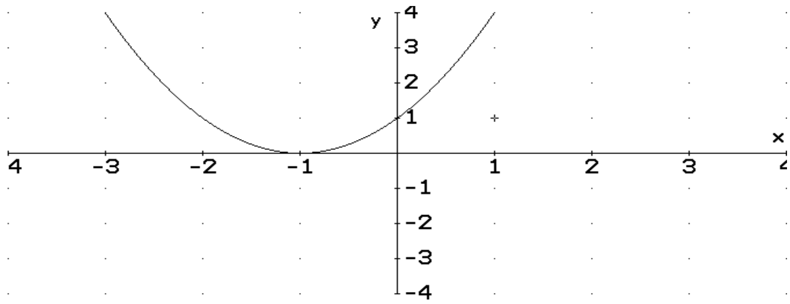
$C^- = (-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$

EJEMPLO 3:

Dada la función $y = x^2 + 2x + 1$

$C^+ = R$

$C^- = \{\ \}$



- **CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO**

De acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra creciente, crece, aumenta con el tiempo, con la temperatura, etc.
Es decir que: una función se dice creciente en un punto, cuando el valor que toma la función en ese punto es mayor que los que toma inmediatamente a la izquierda y menor que los que toma inmediatamente a la derecha; al decir inmediatamente a la izquierda y a la derecha se quiere indicar en un cierto entorno del punto, pues para valores de x más alejados, puede ocurrir que la condición no se cumpla.
Analizamos los ejemplos 1 , 2 y 3 cuyos gráfico se encuentran en el item anterior a éste

EJEMPLO 1:
Dada la función $y = x^2 + 5x + 6$ $\qquad Crece = (-2{,}5\,;+\infty) \quad y \quad Decrece = (-\infty\,;-2{,}5)$

EJEMPLO 2:
Dada la función $y = -x^2 - 5x - 6$ $\qquad Crece = (-\infty\,;-2{,}5) \quad y \quad Decrece = (-2{,}5\,;+\infty)$

EJEMPLO 3:
Dada la función $y = x^2 + 2x + 1$ $\qquad Crece = (-1\,;+\infty) \quad y \quad Decrece = (-\infty\,;-1)$

- **MAXIMOS Y MINIMOS**

Se dice que una función alcanza en un punto de su dominio, un máximo relativo o local cuando el valor de la
función en dicho punto es el mayor de los que toma en un entorno del mismo. Análogamente, se dice que una función alcanza un mínimo relativo o local cuando el valor que determina la función en dicho punto, es el menor de los valores que toma en un entorno del mismo. Estos máximos o mínimos se llaman relativos o locales, porque se consideran valores de la función, en puntos vecinos, próximos al punto considerado; en otros más alejados puede ocurrir que la función tome valores mayores que los máximos relativos y menores que los mínimos relativos, a éstos valores se lo llama máximos o mínimos absolutos.
Las funciones cuadráticas siempre presentan máximos o mínimos absolutos, nunca relativos, ya que no existe un valor mayor o menor que pueda tomar la función en cualquier otro punto considerado. Estos valores máximos o mínimos absolutos, en las funciones cuadráticas siempre coinciden con el vértice.

Así teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, analizamos las situaciones

EJEMPLO 1:
Dada la función $y = x^2 + 5x + 6$ En x = -2,5 la función posee un mínimo absoluto

EJEMPLO 2:

Dada la función $y=-x^2-5x-6$ En x = -2,5 la función posee un máximo absoluto

EJEMPLO 3:

Dada la función $y=x^2+2x+1$ En x = -1 la función posee un mínimo absoluto

Muchas veces se presenta en la resolución de un problema, la necesidad de encontrar un valor máximo o mínimo que sea solución de la situación planteada.
En muchos de los casos en que una función cuadrática es la interpretación matemática de la situación real, estas soluciones se encuentran identificando el vértice de la parábola

- **EJE DE SIMETRÍA**

Cada parábola presenta un eje de simetría vertical y, sobre el, se encuentra el vértice que es el punto en el que la curva pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. El eje de simetría es $x=x_v=-\frac{b}{2.a}$

- **CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Para graficar la función $f(x)=x^2+2x-8$, podemos proceder así:

- Hallamos sus raíces aplicando la fórmula : $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1.(-8)}}{2.1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases}X_1=2\\X_2=-4\end{cases}$$

Por lo que las **intersecciones con el eje x** son: (2 ; 0) y (-4 ; 0)

- **Intersección con el eje y** =(0 ; Término independiente) $\Rightarrow\cap$ eje y = (0 ; -8)
- Calculamos la ecuación del **eje de simetría** que pasa por la abscisa del vértice $x=x_v=-\frac{b}{2.a}$, así

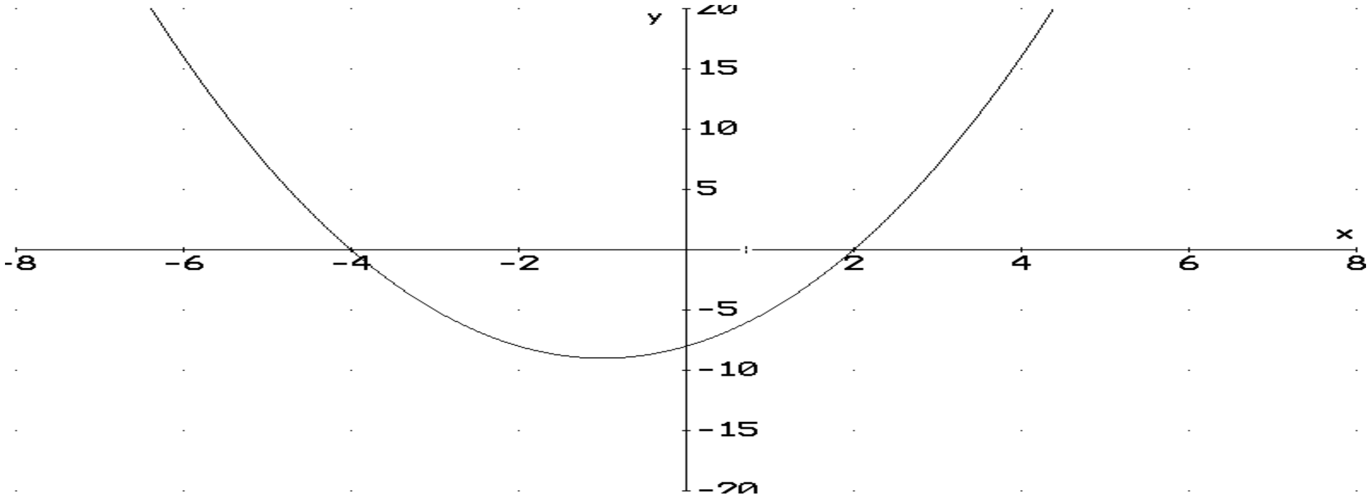
$$x=-\frac{2}{2.1}=-\frac{2}{2}=-1$$

- Calculamos el **vértice** $x_v=-1$

$$y_v=(-1)^2+2.(-1)-8=1-2-8=-9$$

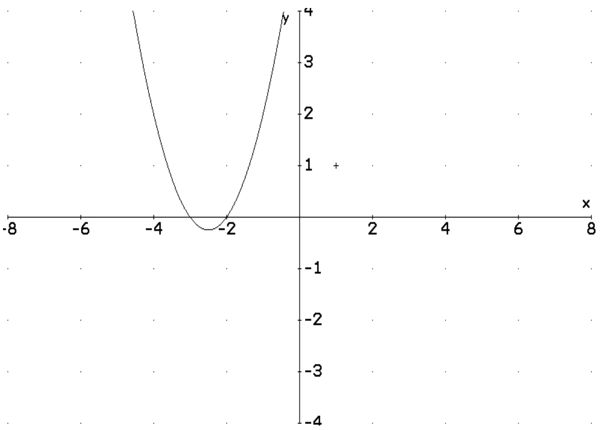
$$vértice = (-1\,;\,-9)$$

- Marcamos los puntos que obtuvimos y trazamos la gráfica aproximada



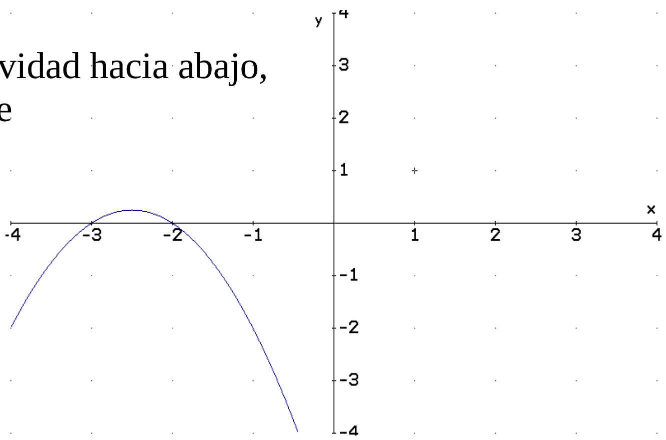
- **CONCAVIDAD HACIA ARRIBA O HACIA ABAJO**

Al hablar de **concavidad** de acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra, llamamos cóncavo cuando hablamos de una superficie curva hacia adentro y llamamos convexo cuando hablamos de una superficie curva hacia fuera. En matemática un gráfico de una función es cóncavo o con concavidad hacia arriba cuando se presenta como en el ejemplo a continuación.



Las funciones cuadráticas son o cóncavas o convexas, no pueden poseer intervalos de convexidad y concavidad

Y decimos que es **convexo** o bien con concavidad hacia abajo, cuando es como muestra el ejemplo siguiente



- **FORMA FACTORIZADA Y FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Si una función cuadrática tiene raíces reales $x_1 \quad y \quad x_2$, ya sean iguales o distintas, su fórmula puede expresarse en forma factorizada, así:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

Si conocemos las coordenadas del vértice de una función cuadrática, su fórmula puede expresarse en forma canónica así:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f(x) = a.(x - x_V)^2 + y_v$$

$$\begin{aligned} &siendo\ x_v : abscisa\ \ del\ \ vértice \\ &\qquad\quad y_v : ordenada\ \ del\ \ vértice \end{aligned}$$

- **RELACIONES ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES**

Las raíces $x_1 \quad y \quad x_2$ de una función cuadrática se relacionan con los coeficientes a, b y c de su fórmula polinómica mediante las siguientes expresiones:

$$a.x^2 + bx + c = 0 \quad \leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad y \quad x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Una de las primeras cosas que se explican en Aritmética es que no pueden sumarse o restarse magnitudes heterogéneas. Este hecho es tan conocido, que se ha convertido en una frase hecha: “NO PUEDEN SUMARSE PERAS Y MANZANAS”.
Sin embargo, es posible encontrar un factor común, por ejemplo, si tenemos:

5 peras + 5 manzanas = 5. (peras + manzanas)

Los problemas de factorización consisten en transformar una expresión algebraica en una serie de productos que faciliten el manejo de la expresión.
Los procesos de factorización son muy importantes en las demostraciones y para la obtención de fórmulas.

FACTOREO

La palabra factores proviene de factor

¿Qué operación matemática vincularías a la palabra FACTOR?..........................

FACTORIZAR UN POLINOMIO ES TRANSFORMARLO EN UNA MULTIPLICACIÓN

Ahora vamos a aprender algunas técnicas para expresar un polinomio en producto.

- **EXTRACCION DE FACTOR COMUN** (analicemos el título)

Sacar o quitar algo | ya vimos que proviene de .... | porque se repite en todos los términos

EXTRAER FACTOR COMUN: Significa sacar o quitar el factor que se repite en todolos términos

EJEMPLOS:

1) $5x^2 - 3x = x.(5x-3)$

2) $4x^5 + x^8 - 5x^9 = x^5.(4 + x^3 - 5x^4)$

3) $5x^{15} + 15x^7 - 25x^9 = 5x^7.(x^8 + 3 - 5x^2)$

4) $\frac{4}{15}x^4 - \frac{2}{25}x^5 + \frac{6}{5}x^7 = \frac{2}{5}x^4\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}x + 3x^3\right)$

- **DIFERENCIA DE CUADRADOS** (analicemos el título)

Porque hay dos términos que restan | Porque esos dos términos se encuentran elevados al cuadrado

Si se aplica propiedad distributiva y se resuelve la siguiente expresión:

(2a + b). (2a – b)

=……………………………………………………………………

Se obtiene: $4a^2 - b^2$

Lo que vamos a hacer ahora es el camino inverso, es decir que dado $4a^2 - b^2$, debemos obtener

(2a + b). (2a – b)

Para lograrlo veremos algunos pasos a seguir

Ejemplo: $4a^2 - b^2$

$\downarrow \quad \downarrow$

2a b

Respuesta:

$\boxed{(2a + b). (2a - b)}$

Pasos a Seguir:

1º Observo que los dos términos estén restando

2º Hallamos las raíces cuadradas de los dos términos dados

3º Escribimos la respuesta:

(raíz$_1$ - raíz$_2$). (raíz$_1$ + raíz$_2$)

Muchas veces podemos combinar diferentes técnicas para expresar el polinomio como producto de factores del menor grado posible.

EJEMPLO 1.

$$A(x) = 3x^3 - 12x$$
$$A(x) = 3x.(x^2 - 4)$$
$$A(x) = 3x.(x-2).(x+2)$$

- **FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO**

Para factorizar el polinomio $U(x) = -3x^2 + 12x + 15$ debemos buscar las raíces del mismo, para ello igualamos a cero el polinomio. Así: $-3x^2 + 12x + 15 = 0$ Esta es una ecuación cuadrática, que resolvemos mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

En nuestra ecuación: a = -3, b = 12, c =15. Reemplazamos estos valores en la fórmula.

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4.(-3).15}}{2.(-3)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + \ldots\ldots}}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Una vez obtenida las raíces, todo polinomio P(x) que tenga “n” raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x) = a.(x - raíz_1).(x - raíz_2).....$$

Volviendo a nuestro ejemplo, para factorizar: $U(x) = -3x^2 + 12x + 15$ siendo las raíces -1 y 5.

Tenemos que: $$\begin{aligned} u(x) &= a.(x - raíz_1).(x - raíz_2) \\ u(x) &= -3.(x-(-1)).(x-5) \\ u(x) &= -3.(x+1).(x-5) \end{aligned}$$

- **FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE GRADO MAYOR A DOS**

Consideremos el polinomio $P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$. Calculemos $P\left(-\frac{1}{3}\right) = ...$

Como $P\left(-\frac{1}{3}\right) = ...$ resulta que $x = -\frac{1}{3}$ es raíz de P(x)

Observen que esa raíz es una fracción que cumple con dos condiciones.

- El numerador 1 divide al coeficiente independiente 4
- El denominador 3 divide al coeficiente principal 3

El Teorema de Gauss, que generaliza esta situación, afirma:

> Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, "p" divide al coeficiente independiente y "q" divide al coeficiente principal.

Entonces, para hallar las raíces reales de un polinomio debemos seguir los siguientes pasos:

1º Hallar los divisores "p" del coeficiente independiente y los divisores "q" del coeficiente principal

2º Formar con ellos fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$, que son las posibles raíces

3º Comprobar si alguna de ellas es raíz.

Siguiendo con nuestro ejemplo, dado el polinomio $P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$. Como $x = -\frac{1}{3}$ es raíz de P(x), resulta que P(x) es divisible por $\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Hagamos la división utilizando la regla de Ruffini. Es decir vamos a dividir $P(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$ por $\left(x + \frac{1}{3}\right)$

	3	1	-12	-4
$-\frac{1}{3}$		-1	0	4
	3	0	-12	0

$$
\begin{aligned}
3x^3 + x^2 - 12x - 4 &= \left(x + \frac{1}{3}\right).\left(3x^2 - 12\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{3}\right).3\left(x^2 - 4\right) \\
&= 3\left(x + \frac{1}{3}\right).(x+2)(x-2)
\end{aligned}
$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINÓMICAS

- ## GRADO Y RAICES DE UN POLINOMIO

Todo polinomio de una variable y de grado “n” que tenga “n” raíces reales puede factorizarse como:

$$\boxed{a_n.(x - x_1).(x - x_2).....(x - x_n)}$$

siendo a_n el coeficiente principal y $x_1, x_2, ...x_n$ sus raíces.

La multiplicidad de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece, en su expresión factorizada, el factor asociado a dicha raíz.

Por ejemplo: Si $P(x) = 3.(x-1).(x+2)^3.(x-5)^2$, entonces: 1 es raíz simple
-2 es raíz de multiplicidad 3
5 es raíz de multiplicidad 2.

- ## LAS FUNCIONES POLINÓMICAS Y SUS GRÁFICAS

Podemos obtener una representación gráfica aproximada de una función polinómica, sin hacer una tabla con muchos valores, teniendo en cuenta que:

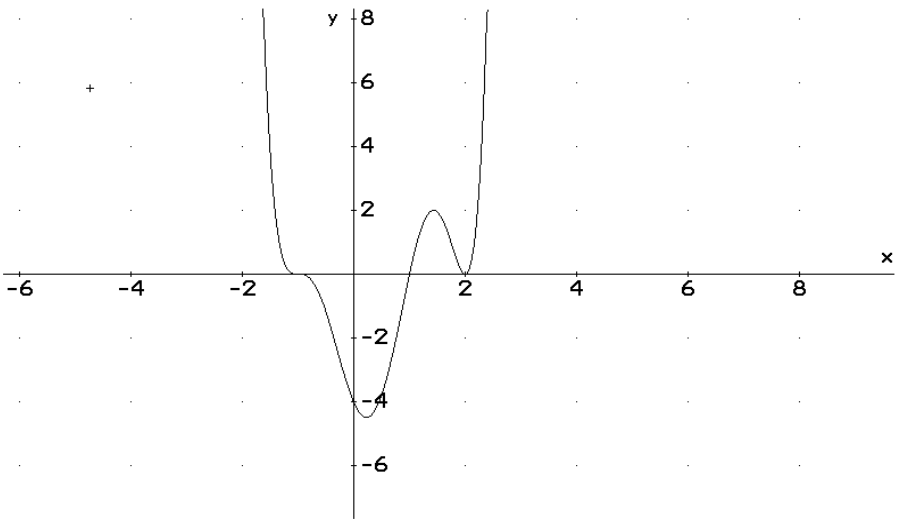
- El dominio es R y es continua.
- La ordenada al origen, F(0), es el término independiente.

- La curva tiene contacto con el eje de las abscisas en los puntos en los que x = raíz real del polinomio. Si la multiplicidad de "r" es impar, la curva "atraviesa" al eje x; si la multiplicidad es par, la curva "rebota" sin atravesarlo.
- Entra raíces consecutivas, las imágenes de la función son todas positivas o todas negativas.

Ejemplo: Para realizar la gráfica de: R(x) $= x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 4x - 4$.Lo primero es factorizar el polinomio, así: R(x) = $(x-2)^2.(x-1).(x+1)^3$, de ésta manera sabemos que 2; 1 y -1 son raíces reales con lo cual intersectan al eje x.
La intersección con el eje y es (0;-4).
Y, como R(x) = $(x-2)^2.(x-1).(x+1)^3$

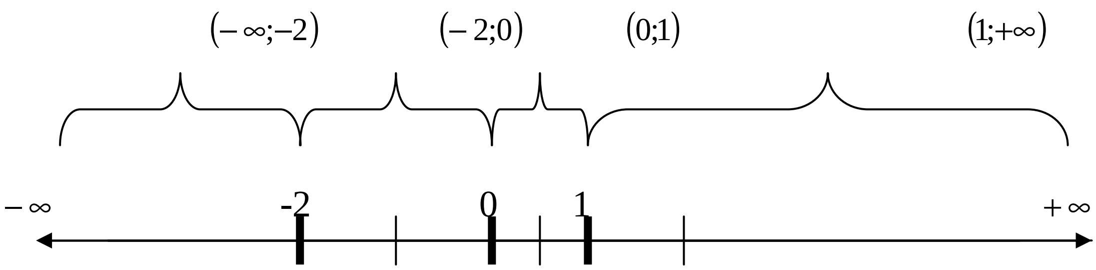
En x =2 la curva rebota por tener multiplicidad par

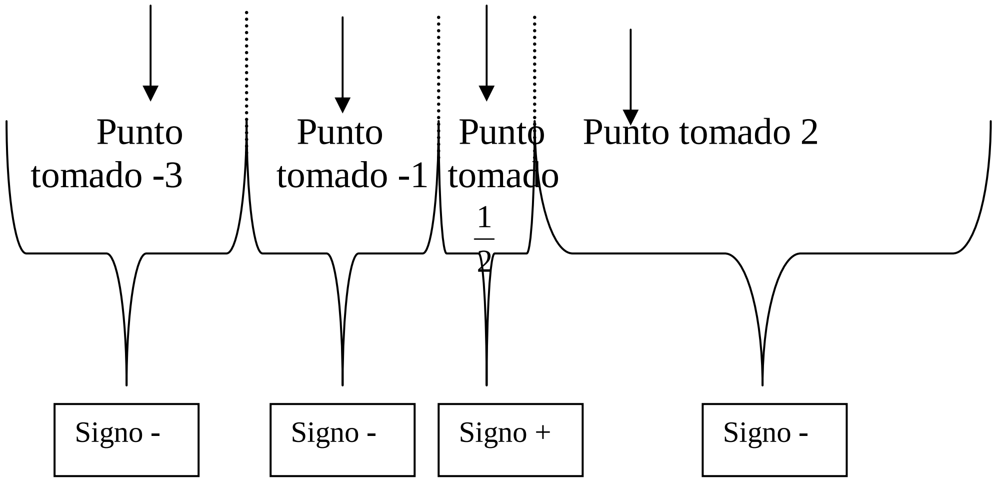
En x=1 y en x= -1 la curva atraviesa por tener multiplicidad impar



- **CONJUNTOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD**

Para obtener los conjuntos de positividad (C^+) y los conjuntos de negatividad (C^-)de la función $f(x) = -2x.(x-1).(x+2)^2$, podemos hacer así:
Como sus raíces son 0,1 y -2 , dividimos en intervalos el dominio tomando como "extremos" dichos valores, y averiguamos el signo de las imágenes en cada intervalo, evaluando el polinomio en un número cualquiera de dicho intervalo.





Cuando f(a) siendo “a” el valor tomado dentro de un intervalo, cuando f(a) haya resultado positivo, el gráfico de la función estará por encima del eje de las x, y el intervalo en cuestión formará parte del conjunto de positividad.
Si f(a) resulta negativo, el gráfico de la función estará por debajo del eje x, y el intervalo en cuestión formará parte del conjunto de negatividad.

En este caso: $\boxed{C^{+} = (0;1) \text{ y } C^{-} = (-\infty;2) \cup (-2;0) \cup (1;+\infty)}$

Utilizando estos datos y teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos construir una gráfica aproximada.

De esta manera: dada la función $f(x) = -2x.(x-1).(x+2)^2$. Sabemos que:
Raíces: 0; 1 y -2
Intersección con el eje x= (0;0), (1;0) y (-:
Intersección con el eje y = (0;0)
En x= -2 la curva rebota, no atraviesa al e
En x = 0 y en x = 1 la curva atraviesa al e
$C^{+} = (0;1)$
$C^{-} = (-\infty;2) \cup (-2;0) \cup (1;+\infty)$