Profesora de Matemática: Sandra Verónica Redaelli

Profesora: Sandra Redaelli

GUIA Nº 7

Aplicaciones de la Derivada

Parte Teórica

❖ PUNTOS CRÍTICOS:

Se llama así aquellos puntos en que la derivada es cero o no está definida.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = (1-x)^2$, la derivada es: $f'(x) = 2.(1-x).(-1) = -2.(1-x)$

La derivada de la función se anula para x = 1, luego x = 1es el único punto crítico de la función

Ejemplo 2: Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, la derivada es $f'(x) = \frac{x.(x-2)}{(x-1)^2}$.

La derivada no está definida en x = 1, además se anula cuando el numerador es cero, es decir:

$$x.(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2$$

Luego esta función tiene 3 puntos críticos que son: x = 1 ; x = 0 y x = 2

❖ CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

De acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra creciente, crece, aumenta con el tiempo, con la temperatura, etc.; aceptamos intuitivamente que en el punto x = 1 la función es creciente, pues al aumentar los valores de x crecen, aumentan los correspondientes de la función.
Análogamente aceptamos que la función es decreciente en x = 5
Es decir que: una función se dice creciente en un punto, cuando el valor que toma la función en ese punto es mayor que los que toma inmediatamente a la izquierda y menor que los que toma inmediatamente a la derecha; al decir inmediatamente a la izquierda y a la derecha se quiere indicar en un cierto entorno del punto, pues para valores de x más alejados, puede ocurrir que la condición no se cumpla.
Así, podemos afirmar que la función representada posee:

$D = R$

$\text{Im} = R$

$\cap$ *eje* $x = (-4;0), (-1;0)$ y $(6{,}2\ ;\ 0)$

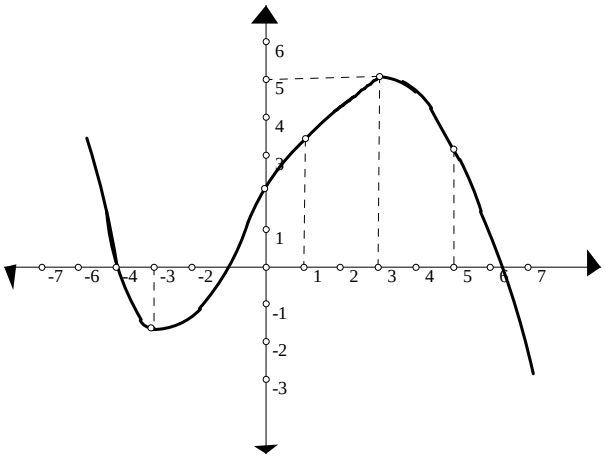
$\cap$ *eje* $y = (0;3)$

$C^{+} = (-\infty;4) \cup (-1\ ;\ 6{,}2)$

$C^{-} = (-4;-1) \cup (6{,}2\ ;\ +\infty)$

$Crece = C^{\uparrow} = (-3;3)$

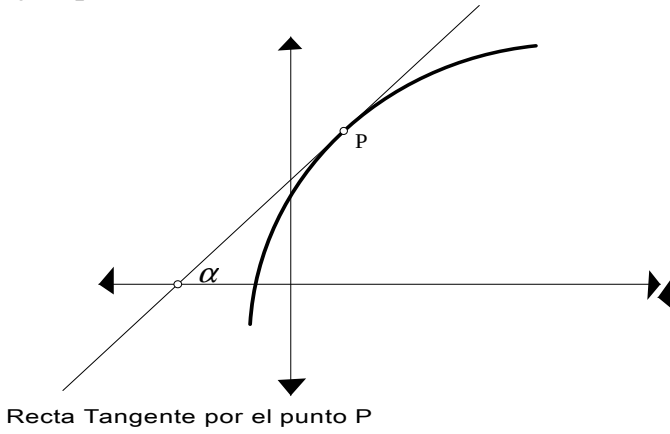
$Decrece = C^{\downarrow} = (-\infty;-4) \cup (3;+\infty)$



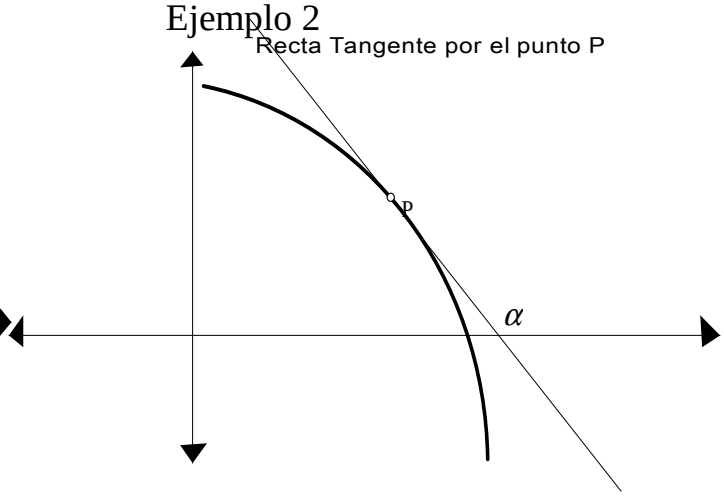
Matemáticamente, sabemos que una función crece o decrece cuando trazamos rectas tangentes a la curva en algunos puntos. Si la pendiente de esas rectas tangentes, en un punto, es positivas entonces la función es creciente en ese punto. Si es negativa, la función es decreciente en ese punto. La recta tangente a una función en un punto en el que ésta tiene un máximo o un mínimo, es horizontal, tiene pendiente cero.
(Recordemos que las rectas con pendiente positivas tienen esta inclinación / y las rectas con pendientes negativas poseen esta inclinación \ )

Dado que la derivada de una función en un punto, es un número que mide la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto; si la derivada es positiva la recta tangente determina con el semieje positivo "x" un ángulo agudo (ejemplo 1) y la función es creciente. Si la derivada es negativa la recta tangente determina con el semieje positivo "x" un ángulo obtuso (ejemplo 2) y la función es decreciente.

Ejemplo 1



Ejemplo 2



$$f'(x) \rangle\ 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \quad agudo \\ función\ creciente \end{cases}$$

$$f'(x) \langle 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \quad obtuso \\ función\ decreciente \end{cases}$$

Estas observaciones se generalizan en el **criterio del signo de la derivada primera**, que dice:

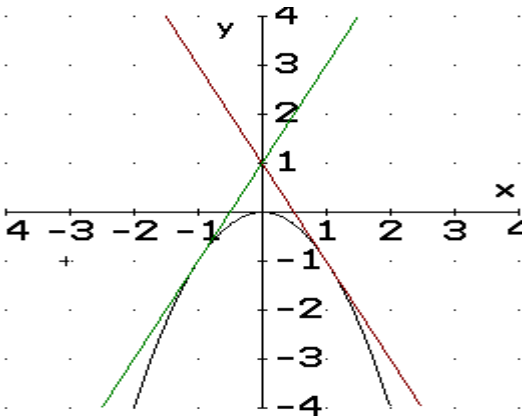
Si la derivada de una función en un punto es positiva, la función es creciente en dicho punto; si la derivada es negativa la función es decreciente

❖ MAXIMOS Y MINIMOS

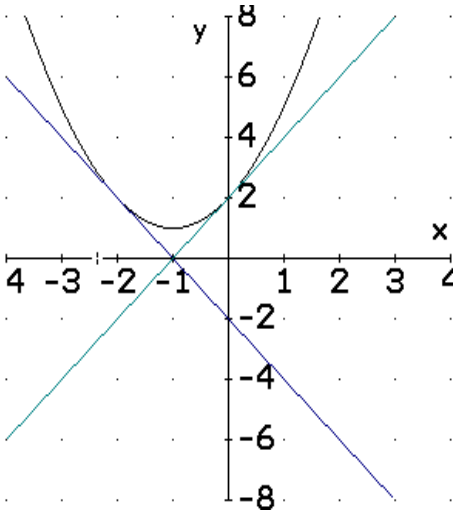
Se dice que una función alcanza en un punto de su dominio, un máximo relativo o local cuando el valor de la
función en dicho punto es el mayor de los que toma en un entorno del mismo. Análogamente, se dice que una función alcanza un mínimo relativo o local cuando el valor que determina la función en dicho punto, es el menor de los valores que toma en un entorno del mismo. Estos máximos o mínimos se llaman relativos o locales, porque se consideran valores de la función, en puntos vecinos, próximos al punto considerado; en otros más alejados puede ocurrir que la función tome valores mayores que los máximos relativos y menores que los mínimos relativos, a éstos valores se lo llama máximos o mínimos absolutos.

Para hallar los valores de máximos y mínimos de una función:

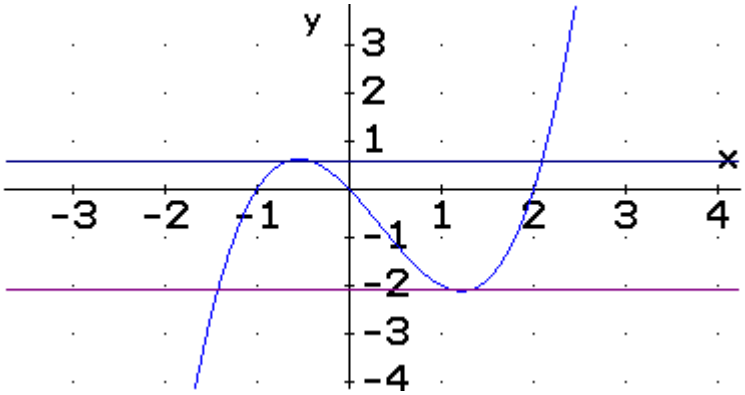
Si a la izquierda de un punto la derivada es positiva y a la derecha del mismo negativa, en ese punto existe un **máximo**



Si a la izquierda del punto la derivada es negativa, y a la derecha es positiva, en ese punto existe un **mínimo**.



Si además, en el punto en que existe un máximo o un mínimo, la curva tiene tangente, se observa que dicha recta tangente es horizontal, quiere decir que la derivada en él debe ser cero, o sea:



Si en el punto en que la función alcanza un máximo o un mínimo existe derivada ésta debe ser cero

En efecto:
Si existe $f'(x_0)$ es un número y por lo tanto debe ser positivo, negativo o cero.

- No puede ser positivo, pues:
  Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f(x) es creciente en x_0, no hay ni máximo ni mínimo.
- No puede ser negativo, pues:
  Si $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f(x) es decreciente en x_0, no hay ni máximo ni mínimo.

Por lo tanto, si no puede ser ni positivo ni negativo, debe ser cero.

Es decir:

F(x) tiene máximo o mínimo en x_0 y existe $f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

Pero esta condición que se anule la primera derivada, que es necesaria, indispensable, para que en el punto haya máximo o mínimo, no basta, no es suficiente, pues hay casos en que la derivada en el punto es 0 y no hay máximo ni mínimo .

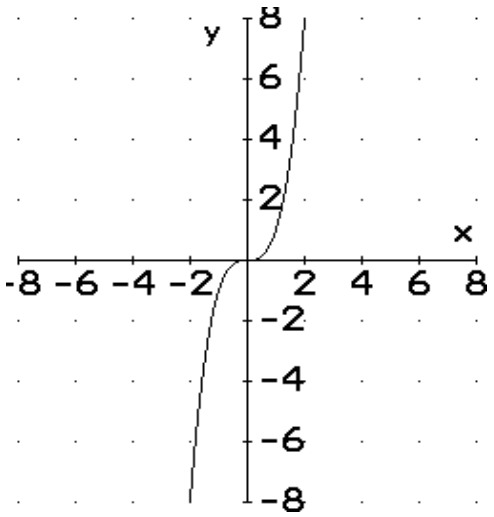
Ejemplo: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3.x^2$

En el origen es $f'(0) = 3.0^2 = 3.0 = 0$

Esta función en donde $f'(x_0) = 0$ en x = 0

En el origen es creciente



Por lo que, además de anularse la primera derivada, para que haya máximo o mínimo se deben cumplir las condiciones impuestas al signo de esa derivada a la izquierda y a la derecha del punto.

Sobre esta base, hay un criterio muy cómodo para aplicarlo en la práctica, que se llama CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA y dice:

Si en el punto en que se anula la primera derivada, la segunda derivada es distinta de cero, hay un máximo o un mínimo. Hay máximo si la segunda derivada es negativa y hay un mínimo, si la segunda derivada es positiva.

En efecto, $f''(x)$ es la derivada de $f'(x)$ por lo tanto:

- Si $f''(x)$ es negativa resulta que $f'(x)$ es decreciente en el punto en que vale 0, luego debe ser positiva a la izquierda, función creciente, negativa a la derecha, función decreciente que es la condición para la existencia de un máximo.
- Si $f''(x)$ es positiva resulta que $f'(x)$ es creciente en el punto en que vale 0, luego debe ser negativa a la izquierda, función decreciente, positiva a la derecha, función creciente que es la condición para la existencia de un mínimo.

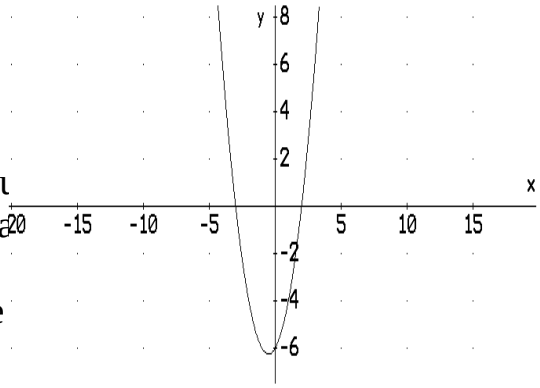
EN SÍMBOLOS Y RESUMIENDO:

$$f'(x_0)=0 \quad \wedge \quad f''(x_0)\neq 0 \begin{cases} f''(x_0)\langle 0 & \Rightarrow f(x)\ tiene\ un\ máximo\ en\ x_0 \\ f''(x_0)\rangle 0 & \Rightarrow f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ en\ x_0 \end{cases}$$

Procedimiento para determinar los máximos o mínimos

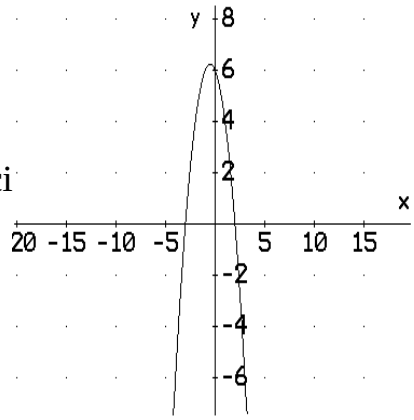
1. Se obtiene $f'(x)$
2. Se iguala a cero, es decir $f'(x)=0$ y se determinan los valores de x = a que satisfacen dicha ecuación.
3. Se obtiene $f''(x)$
4. Se calcula el valor de $f''(a)$ para cada uno de los valores de x que anulan a $f'(x)$
5. $\begin{cases} Si\ f''(a)\langle 0 & \Rightarrow f(x)\ tiene\ un\ máximo\ en\ x=a \\ Si\ f''(a)\rangle 0 & \Rightarrow f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ en\ x=a \end{cases}$

❖ CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD



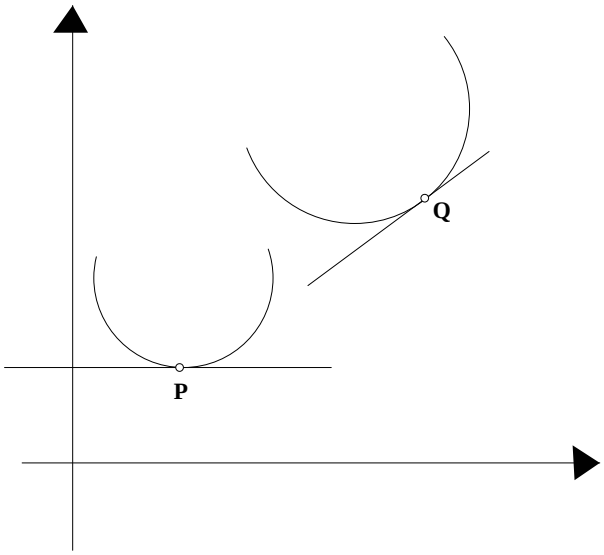
Al hablar de concavidad de acuerdo con el significado qu
el lenguaje corriente damos a la palabra, llamamos cónca
cuando hablamos de una superficie curva hacia adentro
y llamamos convexo cuando hablamos de una superficie

curva hacia fuera.
En matemática un gráfico de una función es cóncavo o con
concavidad hacia arriba cuando se presenta como en el ejemplo
a continuación



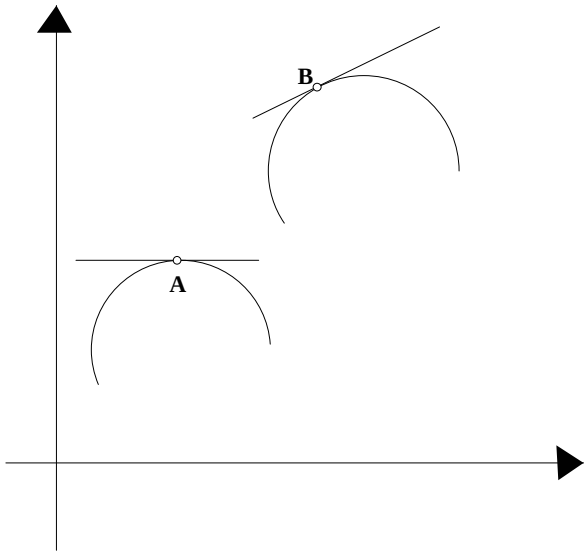
Y decimos que es convexo o bien con concavidad haci
cuando es como muestra el ejemplo siguiente

CONCAVIDAD O BIEN CON CONCAVIDAD HACIA ARRIBA



En los puntos P de tangente horizontal y Q de tangente oblicua, la curva es **cóncava** en la dirección y sentido del semieje positivo y, también se dice **cóncava hacia arriba.**
Como se observa en la figura, se define: la curva es cóncava hacia arriba en un punto de tangente horizontal u oblicua, cuando en un entorno reducido del punto el arco de curva está en el semiplano superior con respecto a la tangente

CONVEXIDAD O BIEN CON CONCAVIDAD HACIA ABAJO



En los puntos A de tangente horizontal y B de tangente oblicua se dice que la curva es **convexa** en la dirección y sentido del semieje positivo y, también se dice **cóncava hacia abajo**.
Como se observa en la figura, se define: la curva es cóncava hacia abajo en un punto de tangente horizontal u oblicua, cuando en un entorno reducido del punto, el arco de curva está en el semiplano inferior con respecto a la tangente.

Si la función tiene segunda derivada resulta que:

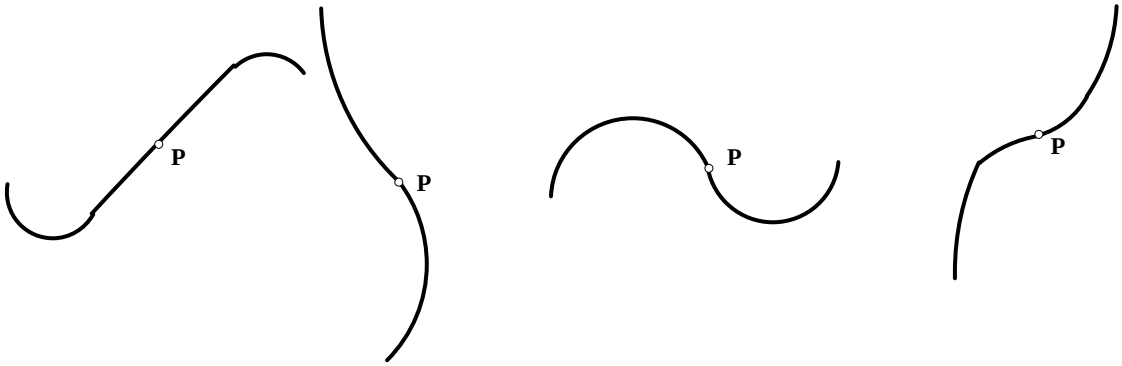
- Si la segunda derivada de la función en un punto es positiva, la curva es cóncava hacia arriba en el punto correspondiente
- Si la segunda derivada de la función en un punto es negativa, la curva es cóncava hacia abajo en el punto correspondiente

En resumen:

$f''(x_0)$	$\rangle\ 0$	$\Leftrightarrow$	*curva cóncava hacia arriba*
$f''(x_0)$	$\langle\ 0$	$\Leftrightarrow$	*curva cóncava hacia abajo*

❖ PUNTOS DE INFLEXIÓN

En los siguientes gráficos se observa, que en el punto P señalado en cada uno, la curva no es ni cóncava ni convexa; en unos casos como en el primero y en el segundo a la izquierda del punto es cóncava hacia arriba y a la derecha es cóncava hacia abajo. En cambio, en el tercero y cuarto a la izquierda del punto es convexa y a la derecha es cóncava hacia arriba.



Estos puntos se llaman **puntos de inflexión**.

DEFINICIÓN: Se llaman **puntos de inflexión**, a aquel en que la curva cambia el sentido de la concavidad

Para determinar el punto de inflexión:

$f''(x_0) = 0 \ \wedge \ f'''(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow$ el punto de la curva que corresponde a x_0 es de inflexión

Ahora bien, si la tercera derivada es 0 en el punto en que se anula la segunda derivada o bien se trata de un punto en que la segunda derivada no está definida, hay que estudiar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto, si dicho signo cambia hay inflexión.

De lo dicho se deduce que, para determinar los puntos de inflexión se procede así:

- **1º** Procedimiento: si existe segunda derivada se determina en qué puntos se anula y en ellos se calcula la tercera derivada que debe ser distinta de cero.
- **2º** Si la segunda derivada se anula y la tercera derivada también, hay que determinar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto; si el signo es distinto hay inflexión.
- **3º** Si es un punto en que la segunda derivada no está definida, se determina el signo de la misma a la izquierda y a la derecha del punto; si son distintos hay inflexión.