GUIA Nº 4

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Parte Teórica

EJEMPLO 1: En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Se observa que, al reproducirse, la masa de la población aumenta un 15% cada hora. Al comienzo, el cultivo de bacterias tiene una masa de 50 gramos. ¿Cuál s
erá la masa de las bacterias después de dos horas?. ¿Y después de 10 horas?. ¿Y después de 25 horas?.

Deberíamos encontrar una fórmula que permita calcular la masa del cultivo en función del tiempo. Empecemos haciendo una tabla que nos muestre cómo va cambiando la masa en función del tiempo.

Tiempo en horas	Masa en gramos
0	50
1	$50 + 50.\frac{15}{100} = 57{,}5$
2	$57{,}5 + 57{,}5.\frac{15}{100} = 66{,}125$ $\left(50 + 50.\frac{15}{100}\right) + \left(50 + 50.\frac{15}{100}\right).\frac{15}{100} = 66{,}125$

Podemos así contestar a la primera pregunta: después de 2 horas, la mas es de 66,125 gramos.
También se ve que para avanzar una hora es necesario saber cuál es la masa de la hora anterior, para lo cual será necesario analizar un poco más las cuentas realizadas en estos pasos.
De la hora 0 a la hora 1, la masa aumenta en 15%; por lo tanto, la masa que habrá a la primera hora será en 1155 de la masa inicial, o sea:

$$\text{Hora 1} \longrightarrow 50.\frac{115}{100} = 50\ x\ 1{,}15$$

A la segunda hora, también habrá un 115% de lo que había en la hora 1, o sea:

$$\text{Hora 2} \longrightarrow (50\ x\ 1{,}15).\frac{115}{100} = 50\ x\ 1{,}15\ x\ 1{,}15 = 50\ .\ 1{,}15^2$$

Por lo tanto cada hora que pasa se multiplica la masa anterior por 1,15.
A la hora 10, habremos multiplicado 10 veces por 1,15. Tenemos, entonces, que la masa 10 horas después será de $50\ .\ 1{,}15^{10} = 202{,}278$ gramos, aproximadamente.

Así, la forma de encontrar la masa después de t horas es:

$$\text{Hora T} \longrightarrow 50\ .\ 1{,}15^{t}$$

La fórmula de la masa en función del tiempo será: M(t) = $50\ .\ 1{,}15^{t}$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Hemos encontrado aquí una función en la cual la variable se encuentra en el exponente: se llama **función exponencial**

- **Una función exponencial es una función de la forma:**

$$f(x) = k \cdot a^x \quad donde \quad k \in R \ y \ a \in R^+ \ con \ a \neq 1$$

Es necesario que "**a**" sea positivo para que se pueda utilizar como dominio cualquiera de los números reales. Para entender esto, analicemos las definiciones de potencia para los distintos conjuntos numéricos:

- $Si\ x = 0, \quad se\ define\ a^0 = 1\ (si\ \ a \neq 0)$
- $Si\ x \in N, \quad se\ define\ a^x = \underbrace{a\ x\ a\ x\ a\ x ......x\ a}_{x\ veces}$
- Si **x** es un número negativo ⇒ -x es el opuesto de un número negativo, entonces –x es positivo ⇒ -x ∈ N ⇒ definimos $a^x = \frac{1}{a^{-x}}\ (si\ a \neq 0)$
- Si x es una fracción ⇒ $x = \frac{p}{q} \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

En esta última definición, es importante analizar si **a** pude tomar cualquier valor. El problema que tenemos es que a sea negativo y la raíz sea par, por ejemplo:

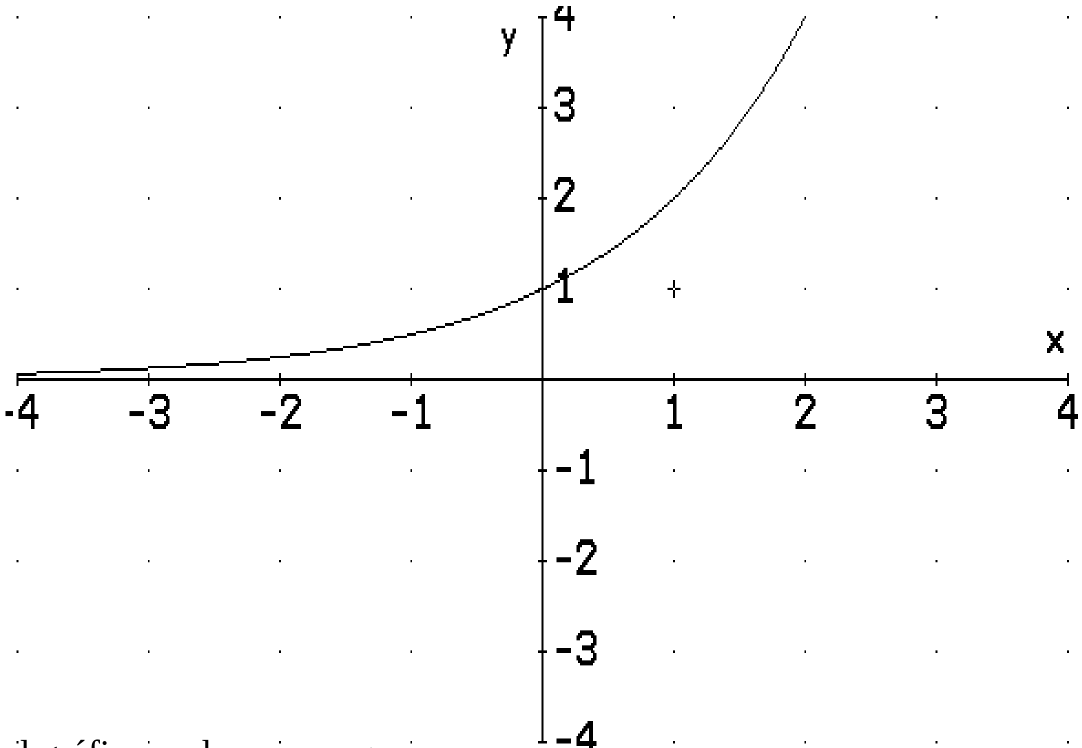
$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-4)}$$

no existe esta expresión en el conjunto de los números reales, ya que ningún número elevado al cuadrado puede dar negativo. Por este motivo es que para que la función exponencial tenga por dominio los números, es necesario que **a** sea positivo.

EJEMPLO 2: Considerando la función exponencial $f(x) = 2^x$, cuyo dominio es R

a) Realizamos una tabla

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
-2	$\frac{1}{4} = 0{,}25$



Observando el gráfico podemos ver que:

- No tiene ceros ya que no posee intersección con el eje x
- Su ordenada al origen es 1, es decir interfecta con el eje y en (0;1)
- Los valores de "y" son todos positivos, por lo tanto su conjunto imagen es (0; +∞).
- Una característica evidente de esta curva es la rapidez con la que crece. A ese crecimiento vertiginoso se lo llama ***crecimiento exponencial***. La función f(x) es creciente.
- Cuando x tiende a - ∞, la curva *se aproxima cada vez más* el eje de las abscisas (eje x), pero nunca llega a tocarlo. Por eso, la recta de ecuación y =0 (es decir, el eje x) es la **asíntota horizontal** de la curva

- Llamamos **función exponencial** a toda función cuya expresión sea de la forma:

$$f(x) = k \,.\, a^x \quad donde \quad k \in R \;\; y \; a \in R^+ \; con \; a \neq 1$$

El dominio de estas funciones es R. al representarlas gráficamente se obtienen curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio, que tienen al eje de abscisas (eje x) como **asíntota horizontal**.

Una asíntota horizontal es una recta a la cual la curva se aproxima indefinidamente, sin llegar a "tocarla**"**

Para comparar y analizar de un modo más general estas curvas vamos a estudiar cómo se ven afectadas por la variación de las constantes **"k"** y **"a"**

<table>
<tr><th>Funciones de la forma $y = a^x$</th><th>Funciones de la forma $y = k \, . \, a^x$</th></tr>
<tr><td>

$f(x) = 2^x$

Características comunes

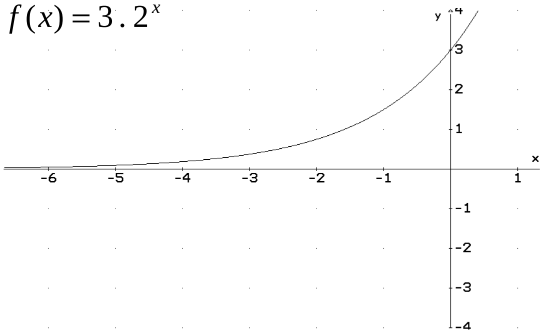
- Corta al eje de ordenadas en (0;1)
- No cortan al eje de abscisas
- Conjunto imagen: (0;+∞)
- Tiene una asíntota horizontal en y =0 es decir en el eje x

Diferencias:

- Si a es mayor que 1, la función es creciente

</td><td>

$f(x) = 3 \, . \, 2^x$



Características comunes

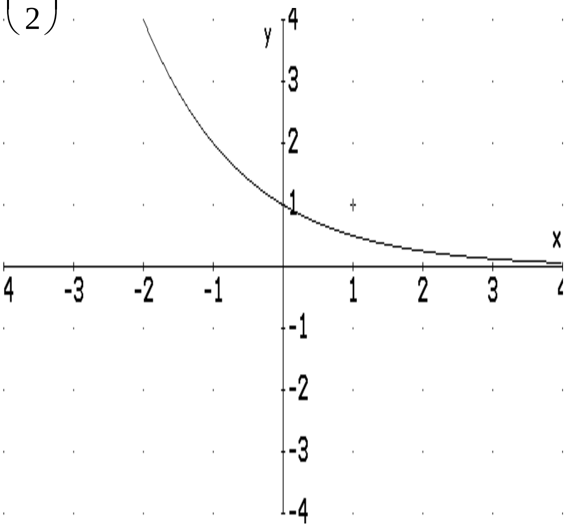
- Corta al eje de ordenadas en (0;k)
- No cortan al eje de abscisas
- Tiene una asíntota horizontal en y =0 es decir en el eje x

Diferencias:

- Conjunto imagen: (0;+∞)

</td></tr>
<tr><td>

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Características comunes

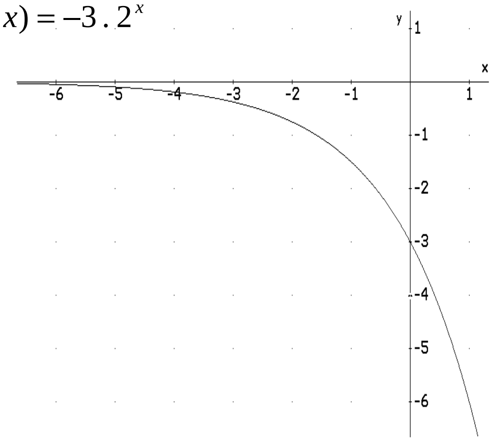
- Corta al eje de ordenadas en (0;1)
- No cortan al eje de abscisas
- Conjunto imagen: (0;+∞)
- Tiene una asíntota horizontal en y =0 es decir en el eje x

Diferencias:

Si a es menor que 1, la función es decreciente

</td><td>

$f(x) = -3 \, . \, 2^x$



Características comunes

- Corta al eje de ordenadas en (0;k)
- No cortan al eje de abscisas
- Tiene una asíntota horizontal en y =0 es decir en el eje x

Diferencias:

- Conjunto imagen: (-∞;0)

</td></tr>
</table>

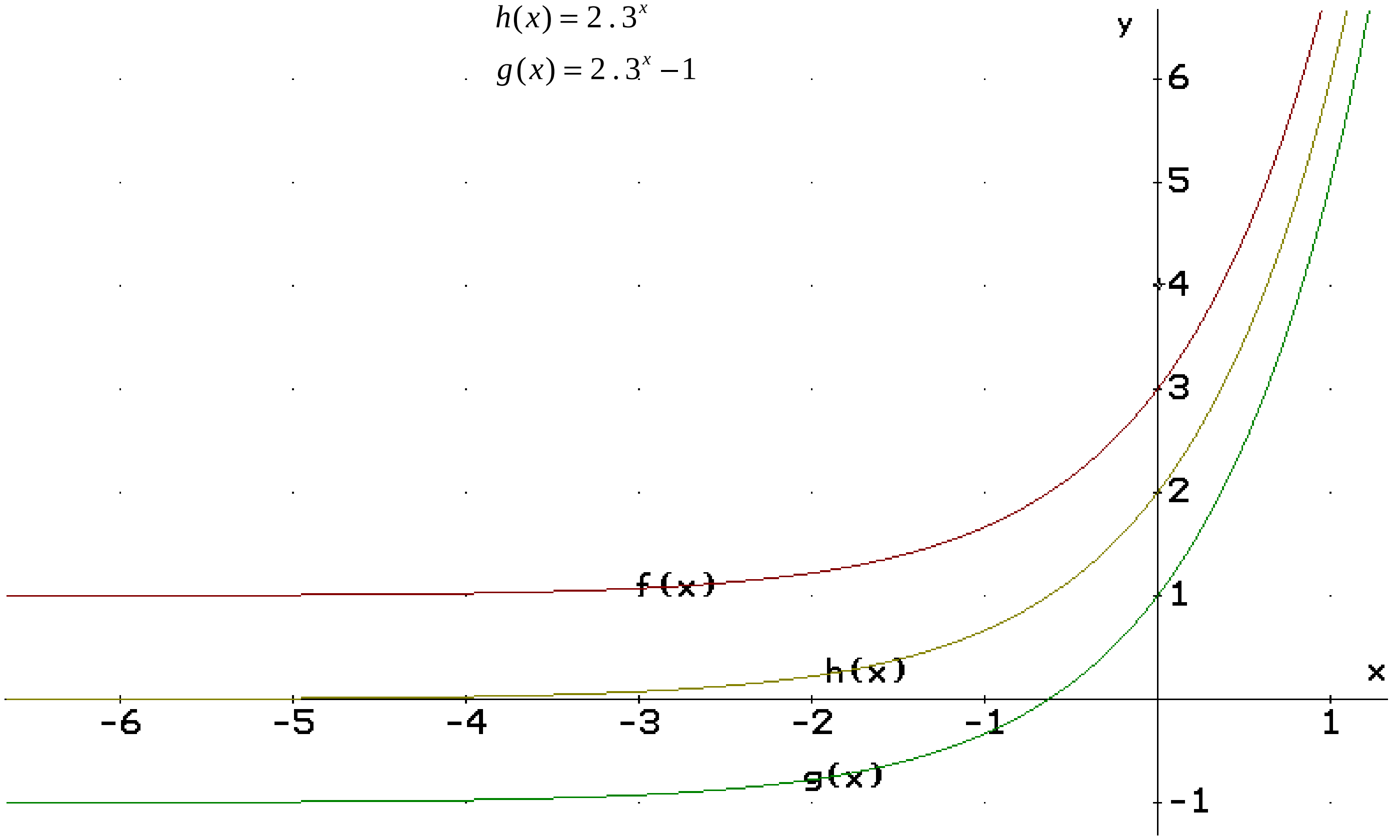
FUNCIONES DE LA FORMA $f(x) = k \,.\, a^x + b$

Observa detenidamente los siguientes gráficos que corresponden a las funciones:

$f(x) = 2 \,.\, 3^x + 1$

$h(x) = 2 \,.\, 3^x$

$g(x) = 2 \,.\, 3^x - 1$



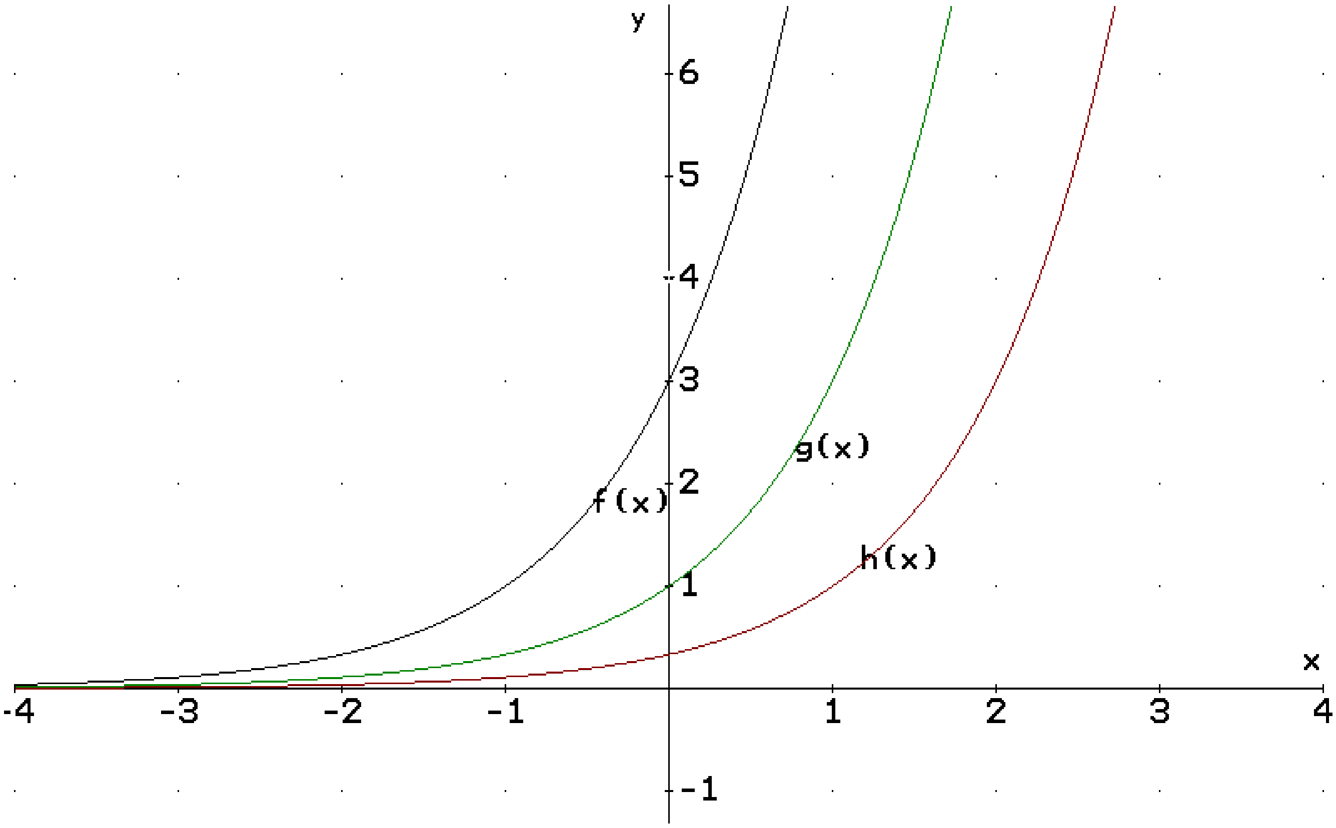
Observen como se completa el siguiente cuadro

	k	a	b	Conjunto imagen	Asíntota
$f(x) = 2.3^x + 1$	2	3	1	$(1;+\infty)$	Y= 1
$g(x) = 2.3^x - 1$	2	3	-1	$(-1;+\infty)$	Y = -1
$h(x) = 2.3^x$	2	3	0	$(0;+\infty)$	Y= 0

FUNCIONES DE LA FORMA $f(x) = k \,.\, a^{x+c}$

A partir de una función exponencial de la forma $y = k.a^x$ se puede representar gráficamente otra de la forma $f(x) = k \,.\, a^{x+c}$ desplazando la gráfica hacia la derecha o hacia la izquierda, según corresponda.

Se graficaron a continuación: $f(x) = 3^{x+1}$, $g(x) = 3^x$ y $h(x) = 3^{x-1}$



ECUACIONES EXPONENCIALES

Decimos que una ecuación es exponencial cuando contiene a la incógnita en algún exponente.

EJEMPLO 1:

$$1024 = 8.2^x$$
$$2^{10} = 2^3.2^x$$
$$2^{10} = 2^{3+x}$$
$$10 = 3 + x$$
$$10 - 3 = x$$
$$7 = x$$

Planteamos la igualdad entre los exponentes

EJEMPLO 2:

$$3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$$
$$3^x + 3^x.3^2 = \frac{10}{3}$$
$$3^x\left(1 + 3^2\right) = \frac{10}{3}$$
$$3^x.10 = \frac{10}{3}$$
$$3^x = \frac{10}{3} \div 10$$
$$3^x = \frac{1}{3}$$

Expresamos el segundo miembro como una potencia de base 3

$$3^x = 3^{-1}$$
$$x = -1$$

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Supongamos poseer la siguiente ecuación

EJEMPLO 1: $2^x = 5$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

No podemos, con los conocimientos que poseemos hasta ahora resolver esta ecuación. Aprenderemos a continuación una nueva operación que nos permita resolver este tipo de ecuaciones

LOGARITMOS

Se llama ***Logaritmación*** a la operación por la cual se calcula el exponente al que se tiene que elevar un número "a" positivo y distinto de 1 para obtener otro número "b". Esto se escribe así:

$\log_a b$ y se lee logaritmo en base "a" de "b".

Se cumple que $\log_a b = x \quad \Leftrightarrow a^x = b, con\ a \rangle 0 \quad y\ a \neq 1$

Con esta definición, lo que se buscaba en el ejemplo anterior era

$$\log_2 5 = x$$
$$2{,}32\ldots. = x$$
$$2{,}32 = x$$

Aunque esto todavía no ayuda a encontrar el valor. Para esto estudiaremos una serie de propiedades del logaritmo.

Como ya mencioné anteriormente en la definición, el logaritmo es el exponente al que hay que elevar una base "a" para obtener un determinado número "b"

$$a^x = b \Leftrightarrow, \log_a b = x \qquad con\ a \rangle 0 \quad y\ a \neq 1$$

Por ejemplo

$$\log_2 16 = 4 \Rightarrow 4^2 = 16$$
$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Rightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$$
$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x^3 = 8$$
$$2^x = 32 \Rightarrow \log_2 32 = x \Rightarrow x = 5$$

Dada la definición de logaritmo: $a^x = b \Leftrightarrow, \log_a b = x \qquad con\ a \rangle 0 \quad y\ a \neq 1$. También podemos analizar que "b" debe ser positivo para que pueda calcularse el logaritmo, ya que si "b" resulta ser una potencia de "a", por ser "a" positivo, "b" también lo será.

LOGARITMOS DECIMALES Y LOGARITMOS NATURALES

Si la base del logaritmo es 10, se llama logaritmo natural y se puede escribir ***log***, sin indicar la base.
Si la base es el número e (e = 2,718…), se denomina ***logaritmo natural*** o ***logaritmo neperiano*** y se escribe ***ln.*** Se denomina neperiano en honor de John Neper (1550-1617), matemático escocés a quien se atribuye el concepto de logaritmo.
Tanto los logaritmos naturales como los decimales aparecen en las calculadoras científicas.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- $\log_a 1 = 0$ esto se cumple pues $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$ esto se cumple pues $a^1 = a$
- Logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, si estos existen

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

- Logaritmo de un cociente es igual a la resta entre los logaritmos del dividendo y del divisor, respectivamente, si estos existen

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- Cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log_n b}{\log_n c}$

Las propiedades de cambio de base nos permite transformar un logaritmo dado en cierta base en otro logaritmo expresado en una base que nos convenga, por ejemplo, aquellas que aparecen en las calculadoras científicas.

- Logaritmo de una potencia $\log_a (x)^n = n.\log_a x$
- Logaritmo de una raíz: $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.\log_a x$

Demostración de la propiedad del producto:

Para ello haremos un cambio de variables:

Llamaremos $\begin{cases} \log_b x = p \Rightarrow b^p = x \\ \log_b y = q \Rightarrow b^q = y \end{cases}$

Multiplicamos miembro a miembro $\longrightarrow$ $b^p.b^q = x.y$

Tenemos un producto de potencias con la misma base $\longrightarrow$ $b^{p+q} = x.y$

Por definición de logaritmo, tenemos: $\longrightarrow$ $\log_b(x.y) = p+q$

Reemplazando llegamos a lo que queríamos demostrar

$$\log_b(x.y) = \log_b p + \log_b q$$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Observen una de las formas en que podemos resolver un sistema de ecuaciones exponenciales

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 1 \\ 3^{x+y} = 9 \end{cases}$$

1º) En cada ecuación buscamos expresar todas las potencias en la misma base. Así tenemos:

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 4^0 \\ 3^{x+y} = 3^2 \end{cases}$$

2º) En cada ecuación planteamos la igualdad de los exponentes

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

3º) Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolvemos en el sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 - x \\ x + x &= 2 \\ 2x &= 2 \\ x &= 2 : 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

4º) Teniendo el valor de x, en este caso x =1 reemplazamos y obtenemos que y= 1

5º) Verificamos

$$\begin{cases} 4^{x-y} = 1 \\ 3^{x+y} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{1-1} = 1 \\ 3^{1+1} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{0} = 1 \\ 3^{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 9 = 9 \end{cases}$$

FUNCIÓN LOGARITMICA

Llamamos función logarítmica a toda función cuya expresión sea de la forma:

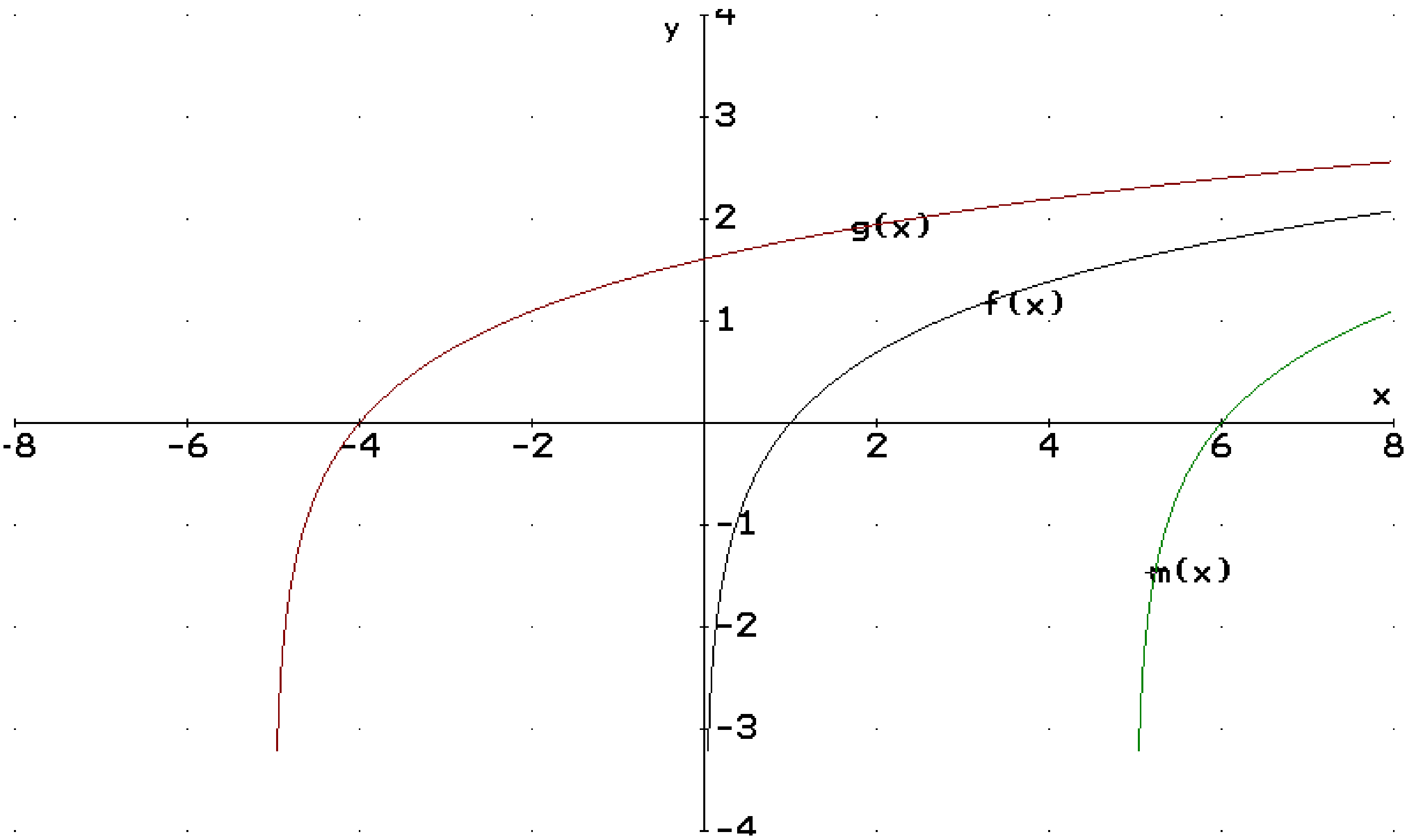
$$f(x) = \log_b x \qquad (x \rangle 0\,;\ b \rangle 0\ ;\ b \neq 1)$$

El dominio de éstas funciones son los reales positivos (R^+), y al representarlas gráficamente se obtiene curvas crecientes o decrecientes en todo su dominio, que tienen al eje de ordenadas como asíntota vertical.

FUNCIONES DEL TIPO $f(x) = \log_c (a.x + b)$

Los siguientes gráficos corresponden a funciones logarítmicas de la forma $f(x) = \log(x + b)$

Ejemplo 1:
$f(x) = \log x$
$g(x) = \log(x + 5)$
$m(x) = \log(x - 5)$



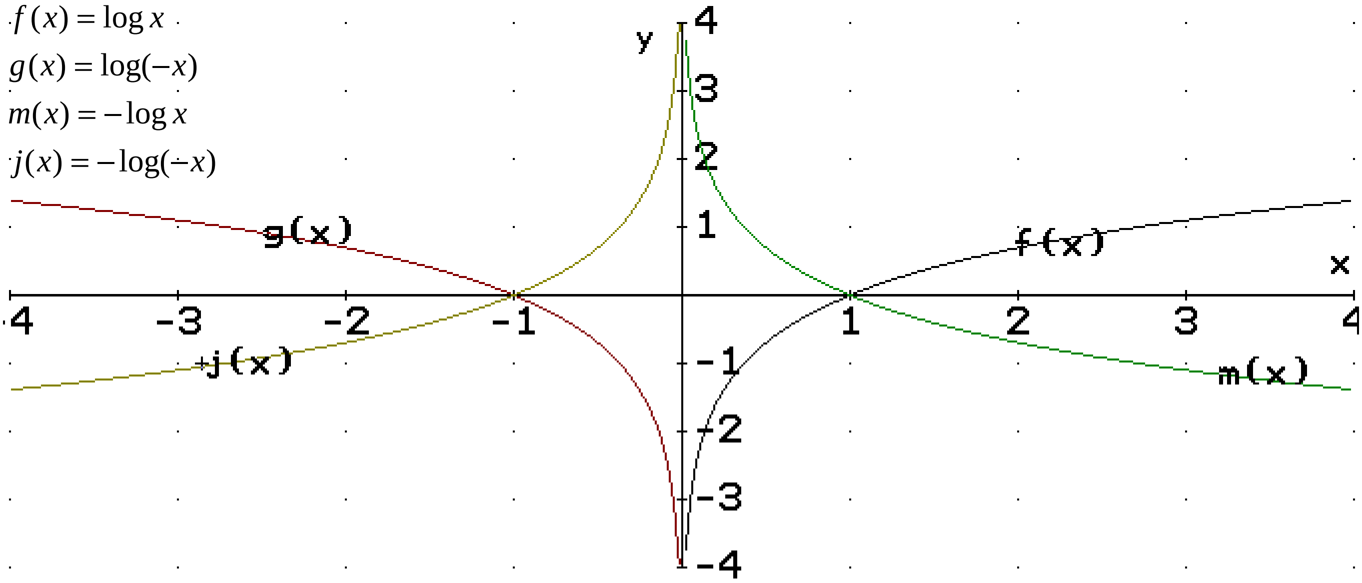
Ejemplo 2: Ahora vamos a representar

$f(x) = \log x$

$g(x) = \log(-x)$

$m(x) = -\log x$

$j(x) = -\log(-x)$



FUNCIONES DEL TIPO $f(x) = \log_c(a.x) + b$

A partir de la función logarítmica de la forma $f(x) = \log_c(a.x)$ se puede representar gráficamente otra de la forma $f(x) = \log_c(a.x) + b$ desplazando la gráfica hacia arriba o hacia abajo según corresponda

Ejemplo: En el gráfico realizado a continuación se trazaron las gráficas de

$f(x) = \log x$

$g(x) = \log x + 2$

$m(x) = \log x - 2$