GUIA Nº 2

Los Números Reales

Parte Teórica

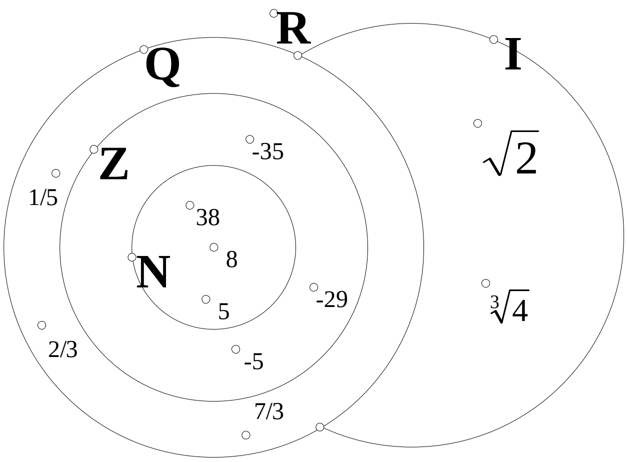
Los números racionales son los que pueden expresarse en forma de fracción. Los números naturales, los enteros, las expresiones decimales exactas y las periódicas pueden ser expresadas en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales (se lo simboliza con la letra Q)

Los números irracionales son los NO racionales, es decir aquellos que no pueden ser expresados en forma de fracción, ya que su expresión decimal tiene infinitas cifras NO periódicas.

Por ejemplo, son números irracionales:

- Las raíces de números naturales cuyos resultados no son naturales: $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{9}$
- Expresiones decimales generadas con cierto criterio, de modo tal que la cantidad de cifras decimales resulten infinitas: 0,123456….; -45, 01000100001000001…. (Los anotamos con tres puntos suspensivos para indicar que sigue la secuencia en las cifras decimales)
- Números "especiales" π = 3,1415… , e = 2,7182, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

La unión del conjunto Q (números racionales) con el conjunto I de los números irracionales forma el conjunto R de los números reales.



RAÍZ ENÉSIMA DE UN NÚMERO REAL

Llamamos radical a una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ $(a \in R;\, n \in N;\, n \rangle 1)$, en la cual n es el índice y a es el radicando.

Un radical representa la raíz enésima de un número real, que se define así:

Para n par y a ≥ 0 : $\sqrt[n]{a} = m \Leftrightarrow a = m^n \; y \quad m \geq 0$

Para n impar : $\sqrt[n]{a} = m \Leftrightarrow a = m^n$

Todo radical puede expresarse en forma de potencia de exponente fraccionario, según la siguiente regla:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

En muchos casos, las propiedades de la radicación nos permiten simplificar los cálculos y transformar expresiones que contienen radicales en otras equivalentes más sencillas.
Es importante tener presente que las propiedades son válidas sólo en los casos en los que todas las raíces involucradas sean números reales.

- Propiedad distributiva: $\sqrt[n]{x.y} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

- Raíces sucesivas: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$

- Simplificación de radicales: Si n es impar $\sqrt[n]{x^n} = x$
  Si n es par $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Dos o más radicales pueden sumarse o restarse siempre que sean semejantes, es decir, que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo: $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

En algunos casos, cuando los radicales no son semejantes, podremos reducirlos mediante un procedimiento llamado extracción de factores del radical, que consiste en factorizar los radicandos, distribuir las raíces y simplificar.

Ejemplo: $\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{32} = \overbrace{\sqrt{3^2.2} + \sqrt{2^3} - \sqrt{2^5}}^{Factorizamos\ los\ radicandos} = \sqrt{3^2.2} + \sqrt{2^2.2} - \sqrt{2^2.2^2.2} =$

$\underbrace{\sqrt{3^2}.\sqrt{2} + \sqrt{2^2}.\sqrt{2} - \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2}}_{aplicamos\ propiedad\ distributiva\ de\ la\ radicación} = 3.\sqrt{2} + 2.\sqrt{2} - 2.2.\sqrt{2} = 3.\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4.\sqrt{2} = \sqrt{2}$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

- Para multiplicar radicales de igual índice seguimos el siguiente procedimiento, basado en la propiedad distributiva:

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$$

Ejemplo: $\sqrt[4]{2}\,.\,\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2.8}=\sqrt[4]{16}=2$

- Para multiplicar radicales de distinto índice se deben buscar radicales equivalentes de modo tal que todos tengan igual índice

Ejemplo: $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt{3}=\sqrt[6]{2^2}\,.\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{2^2.3^3}=\sqrt[6]{4.27}=\sqrt[6]{108}$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES.

Racionalizar un denominador significa transformar una expresión con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional.
En los siguientes ejemplos pueden observar algunos recursos algebraicos útiles para racionalizar denominadores:

- El denominador es un radical único

REGLA PRÁCTICA: Para racionalizar el denominador de una fracción, cuando es un radical único e irreducible, se multiplican los términos de la misma por el factor de racionalización que es igual a un radical del mismo índice cuyo radicando tiene por base de potencia la del radicando dado y por exponente la diferencia entre el índice y el exponente dado.

Ejemplos:

- $\dfrac{2.\sqrt{3}}{3.\sqrt{2}}=\dfrac{2.\sqrt{3}}{3.\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2.\sqrt{3.2}}{3.\sqrt{2.2}}=\dfrac{2.\sqrt{6}}{3.2}=\dfrac{2.\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
- $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}.\dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$
- $\dfrac{c}{\sqrt[5]{b^{12}}}=\dfrac{c}{\sqrt[5]{b^{10}.b^2}}=\dfrac{c}{b^2.\sqrt[5]{b^2}}=\dfrac{c}{b^2.\sqrt[5]{b^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}}=\dfrac{c.\sqrt[5]{b^3}}{b^2.\sqrt[5]{b^5}}=\dfrac{c.\sqrt[5]{b^3}}{b^2.b}=\dfrac{c.\sqrt[5]{b^3}}{b^3}$

- El denominador es un binomio:

REGLA PRÁCTICA: Para racionalizar el denominador de una fracción, cuando es un binomio, se multiplican los términos de la fracción dada por el binomio conjugado del denominador. Se efectúan después todas las reducciones y simplificaciones posibles.

Ejemplos:

- $\dfrac{4}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{4}{1-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{4.(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3}).(1+\sqrt{3})} = \dfrac{4.(1+\sqrt{3})}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{4.(1+\sqrt{3})}{1-3} =$

  $= \dfrac{4.(1+\sqrt{3})}{-2} = -2.(1+\sqrt{3}) = -2-2.\sqrt{3}$

- $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{4.(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2^2}-\sqrt{3^2}} = \dfrac{4.(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3} = \dfrac{4.(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1} =$

  $= -4.(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$