Profesora: Sandra Veronica Redaelli

GUIA Nº 9

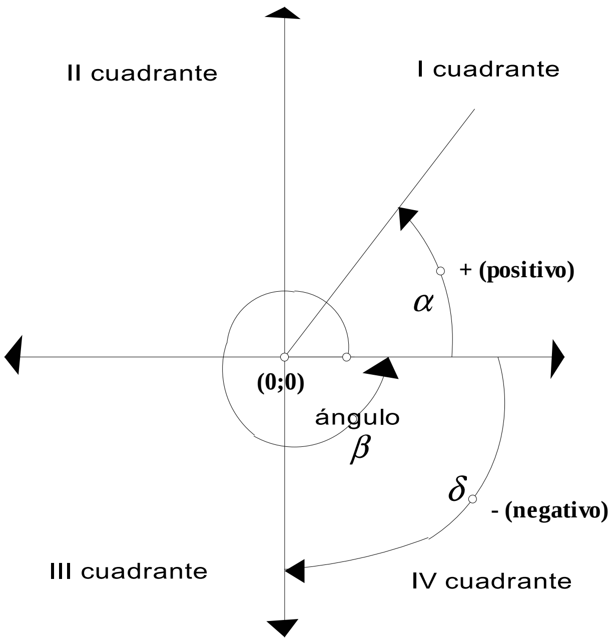
Trigonometria

Parte Teórica

ÁNGULOS ORIENTADOS EN UN SISTEMA CARTESIANO:

Vamos a precisar cómo consideramos a un ángulo en un sistema de ejes cartesianos

- Su ***vértice*** es el origen de coordenadas
- Está generado por la rotación de una semirrecta o rayo con origen en (0;0). El rayo parte desde una posición inicial coincidente con el semieje positivo de las "x" (éste será su ***lado inicial***) y gira manteniendo fijo su origen hasta llegar a una posición que marca su ***lado terminal***. Además, puede realizar más de un giro completo.
- Es ***positivo*** cuando está generado en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y ***negativo*** cuando está generado en el sentido horario.
- Para referirnos a su ubicación, consideramos el plano cartesiano dividido en cuatro sectores, llamados ***cuadrantes***, y localizamos el lado terminal

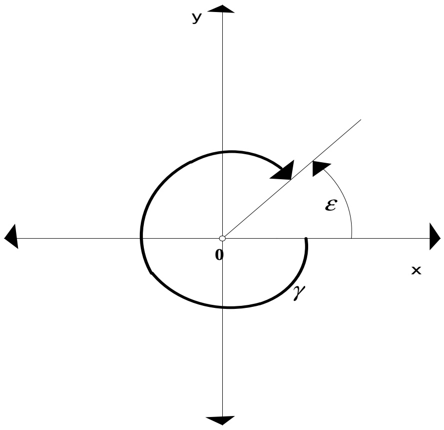


Analicemos algunas situaciones:

❖ **Ejemplo 1**:

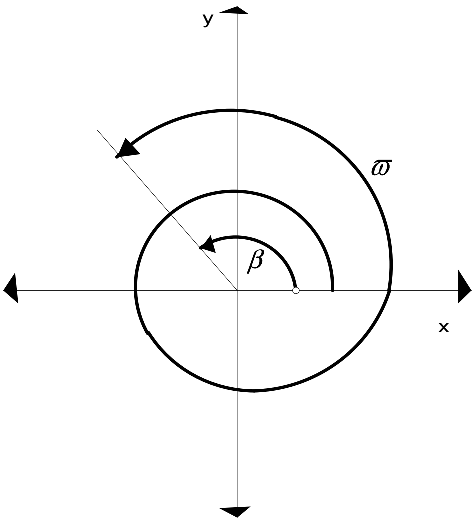
$\varepsilon = 45^{\circ}$
$\gamma = ...$

ε y γ son ángulos del …………. Cuadrante



❖ **Ejemplo 2**: $\beta = 130^{o}$
$\varpi =$ ……….

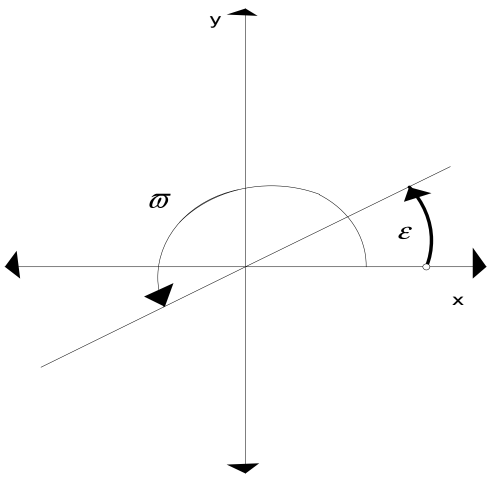
ϖ es un ángulo del …….. cuadrante



❖ **Ejemplo 3**:

$\varepsilon = 30^{\circ}$
ϖ = ……….

El ángulo ϖ está en el ………. Cuadrante
El ángulo ε está en el ………. Cuadrante



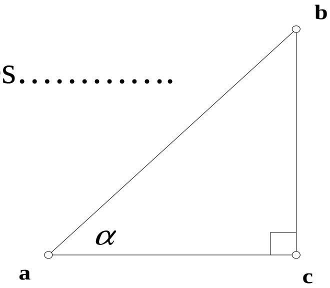
MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Hay varios sistemas de mediciones de ángulos, nosotros trabajaremos con el sistema sexagesimal
(grados, minutos y segundos) y el sistema circular.

La relación entre ellos es que 180º = π o lo que es lo mismo 360º = 2π.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO:

Recordemos las definiciones de las tres razones trigonométricas fundamentales de un ángulo agudo y algunas relaciones entre ellas.
A partir del ángulo α, construimos un triángulo rectángulo y nos referimos a los catetos según su posición relativa al ángulo α.
En este caso, el cateto opuesto es…… y el cateto adyacente es…………
El lado………. Es la hipotenusa.



Definimos las razones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente** de α con las siguientes fórmulas:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{......................} \qquad \cos\ \ \alpha = \frac{..........................}{hipotenusa} \qquad tg\ \ \alpha = \frac{..........................}{...........................}$$

Estas razones, dependen sólo del ángulo α y no de las medidas de los lados del triángulo construido, y se pueden obtener con la calculadora científica.

Recordamos las fórmulas aprendidas hasta ahora

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \longrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

$$sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \longrightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Consideremos ahora los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Estos son ……………., pues sus medidas suman 90 º o $\frac{\pi}{2}$

Analicemos la relación que hay entre sus razones trigonométricas

Para α: Cateto opuesto: …………
Cateto adyacente: ……….

$$sen\ \alpha = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

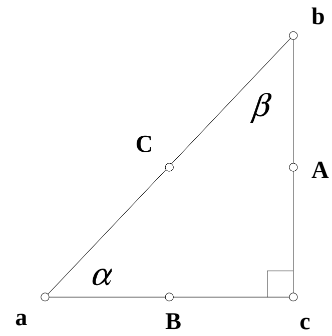
$$tg\ \alpha = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Para β: Cateto opuesto: …………
Cateto adyacente: ……………

$$sen\ \beta = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$\cos\ \beta = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$tg\ \beta = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$



Generalicemos la relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios

En Grados	$sen\ (90º - \alpha) = \cos\ \alpha$ $\cos\ (90º - \alpha) = \ldots\ldots$ $tg\ (90º - \alpha) = \cot g\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$	**En Radianes**	$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \ldots\ldots\ldots$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \ldots\ldots\ldots$ $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot g\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

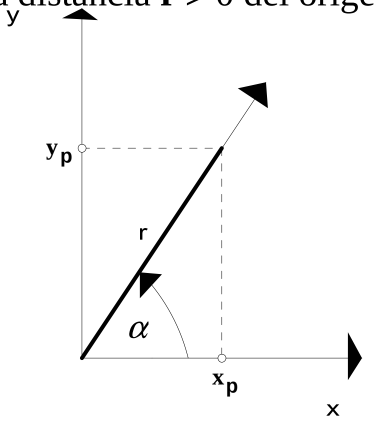
Las definiciones de las razones trigonométricas de ángulos agudos se pueden extender para cualquier ángulo.

Para esto consideramos el ángulo α en el plano cartesiano y marcamos en su lado terminal un punto $P=(x_p;y_p)$ que se encuentra a una distancia **r** > 0 del origen de coordenadas. Así definimos:

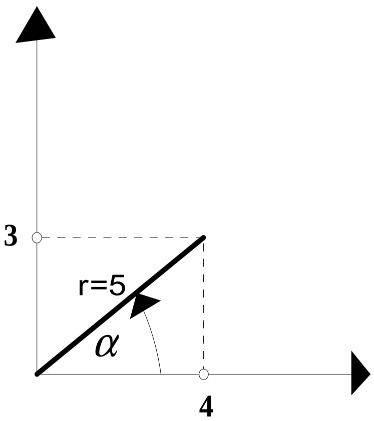
$$sen \quad \alpha = \frac{y_p}{r}$$

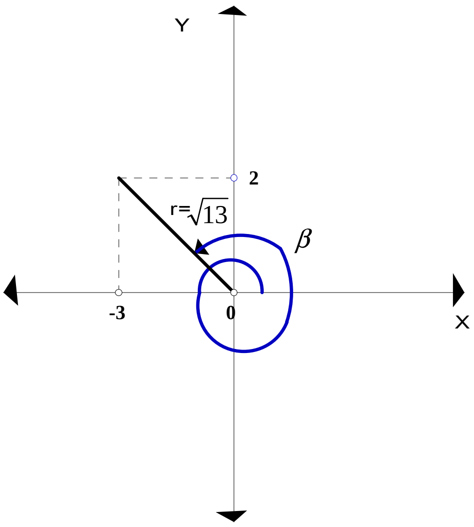
$$\cos \quad \alpha = \frac{x_p}{r}$$

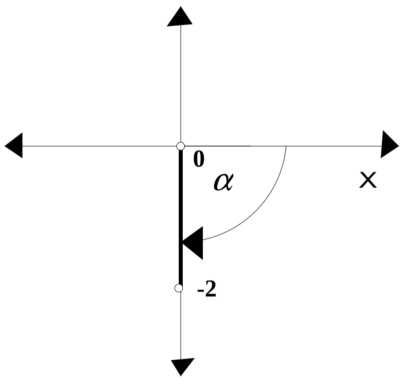
$$tg \quad \alpha = \frac{y_p}{x_p}$$



EJEMPLO 1: Completa. Cuando sea necesario redondeen a los centésimos







$$Sen\alpha = \frac{........}{.........}$$

$$\cos\alpha = \frac{..........}{..........}$$

$$tg\alpha = \frac{..........}{............}$$

$$Sen\beta = \frac{........}{.........}$$

$$\cos\beta = \frac{..........}{..........}$$

$$tg\beta = \frac{..........}{............}$$

$$Sen\alpha = \frac{........}{.........}$$

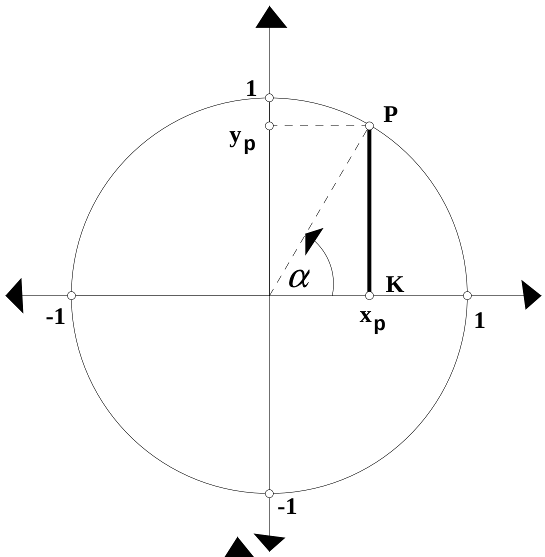
$$\cos\alpha = \frac{..........}{..........}$$

$$tg\alpha = \frac{..........}{............}$$

LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

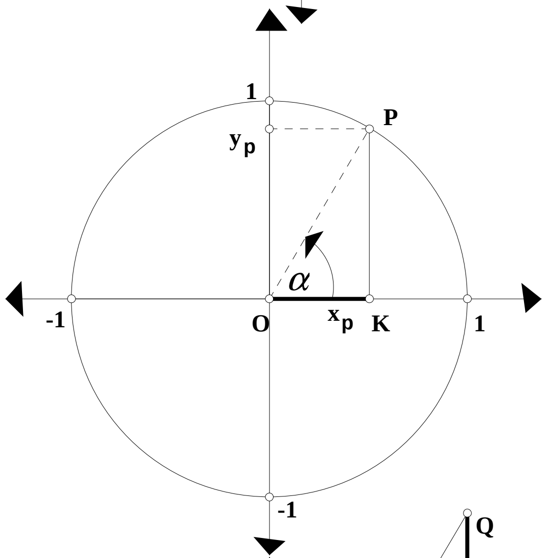
Podemos visualizar gráficamente el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en un sistema cartesiano si consideramos un punto P sobre una circunferencia de **radio 1** a la que llamamos **circunferencia trigonométrica** o **circunferencia unidad.**

En la figura **como r = 1**, tenemos que:



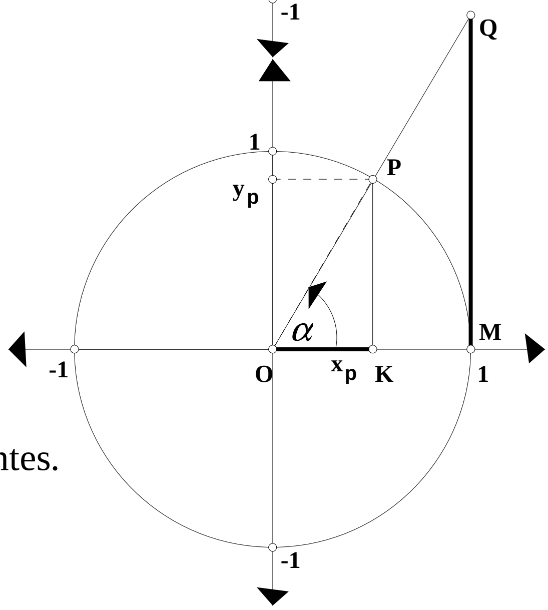
- $sen\ \alpha = \dfrac{y_p}{radio} = \dfrac{y_p}{r} = \dfrac{y_p}{1} = y_p$.

  Es decir que el segmento **PK** está asociado al sen α



- $\cos \alpha = \dfrac{x_p}{radio} = \dfrac{x_p}{r} = \dfrac{x_p}{1} = x_p$

  Es decir que el segmento **OK** está asociado al cos α



- $tg\ \alpha = \dfrac{y_p}{x_p}$. Además $\dfrac{y_p}{x_p} = \dfrac{MQ}{r}$ por ser los triángulos PKO y QMO semejantes.
  Entonces:

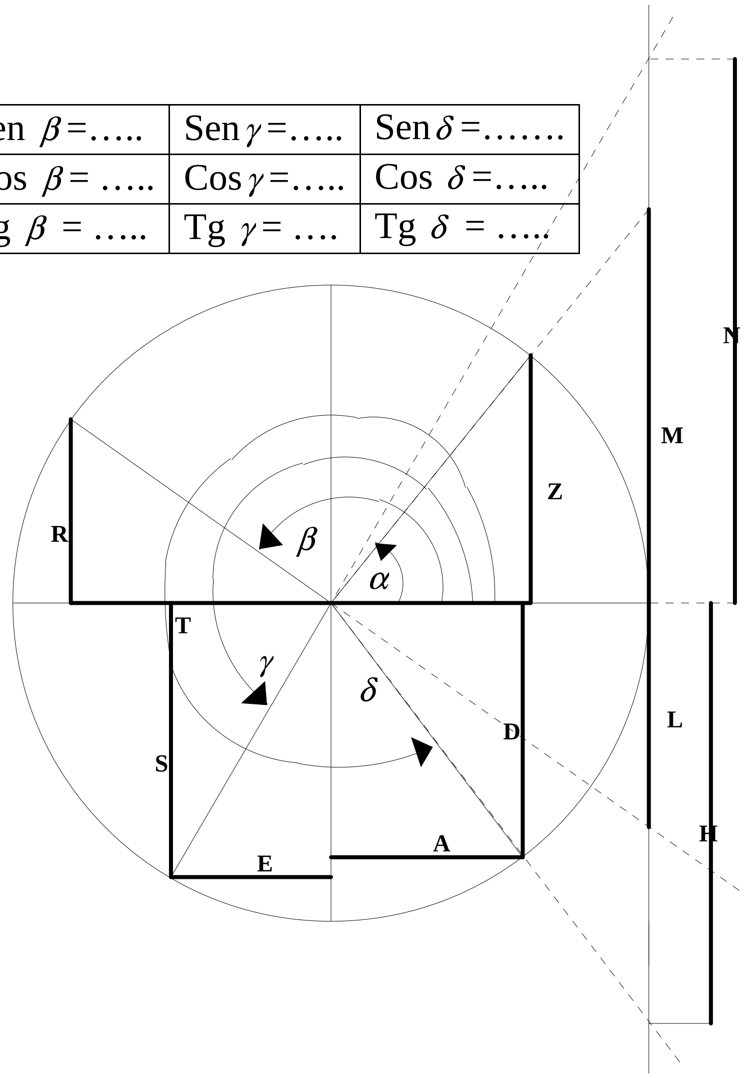
  $$tg\ \alpha = \frac{y_p}{x_p} = \frac{MQ}{radio} = \frac{MQ}{r} = \frac{MQ}{1} = MQ$$

Es decir que el segmento MQ está asociado a la tg α

EJEMPLO 2:

Identifiquen los segmentos asociados, respectivamente, al seno, al coseno y a la tangente de cada ángulo y completen la tabla. Siempre busquen el segmento asociado a la tangente de cada ángulo en la recta vertical que pasa por el punto (1;0). De esta manera, si el ángulo es del II cuadrante o del III cuadrante se debe trazar la semirrecta opuesta al lado terminal del ángulo.

Sen α = Z	Sen β=…..	Sen γ=…..	Sen δ=…….
Cos α = …..	Cos β= …..	Cos γ=…..	Cos δ=…..
Tg α = …..	Tg β = …..	Tg γ= ….	Tg δ = …..



SIGNOS Y CUADRANTES

Completen el esquema con los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.

- El seno y la tangente están asociados a segmentos verticales; cuando están por encima del eje x son positivos y cuando están por debajo son ………………………..

- En cambio, el coseno está asociado a un segmento horizontal. Cuando está hacia la derecha del eje y es …………………… y cuando está hacia la ………………… es ……………………….

II cuadrante Seno (….) Coseno (….) Tangente (….)	**I cuadrante** Seno (….) Coseno (….) Tangente (….)
III cuadrante Seno (….) Coseno (….) Tangente (….)	**IV cuadrante** Seno (….) Coseno (….) Tangente (….)

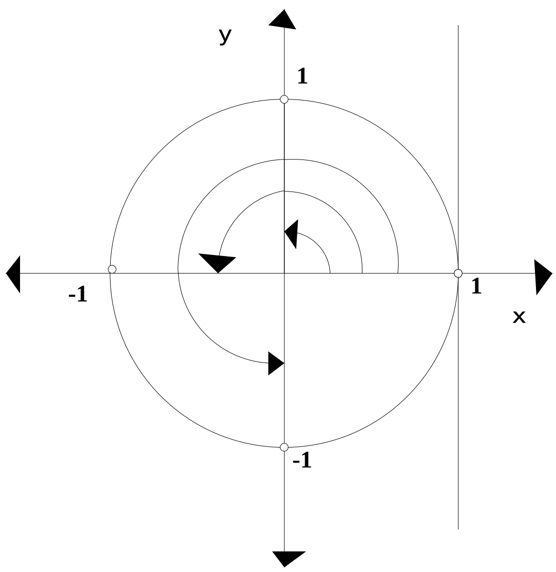
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS ESPECIALES

En algunos casos es posible obtener los valores exactos de las razones trigonométricas sin recurrir a la calculadora.

- **Ángulos de 0º, 90º, 180º, 270º**

Teniendo en cuenta las coordenadas del punto p asociado a cada ángulo en la circunferencia trigonométrica
completen la tabla

α	0º	90º	180º	270º
P		(0;1)		
Sen α		1		
Cos α		0		
Tg α		No existe		



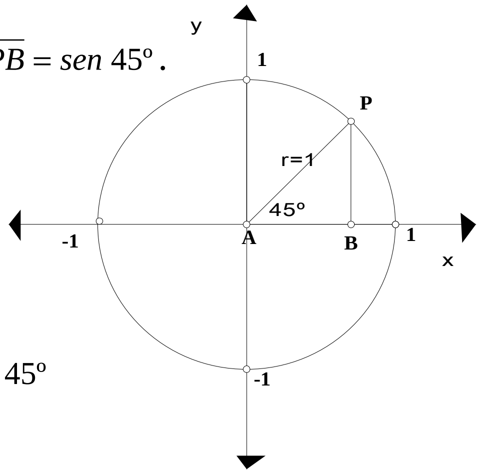
- **Ángulos de 30º, de 45º y de 60º**

Para estos ángulos pueden calcular las razones trigonométricas mediante recursos geométricos.

Consideramos el ABP, rectángulo isósceles:

$\overline{AB} = \overline{PB}$ y $\hat{A} = \hat{P} = 45º$.

Aplicamos el Teorema de Pitágoras y despejamos $\overline{PB} = sen\ 45º$.



$$\overline{AP}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2$$

$$\overline{radio}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2 \quad como \quad \overline{PB} = \overline{AB}$$

$$\bar{1}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PB}^2$$

$$1 = 2.\overline{PB}^2$$

$$\overline{PB}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{PB} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = sen\ 45º$$

Se pueden obtener con procedimientos similares las otras razones que figuran en la siguiente tabla. Complétalas aplicando las propiedades correspondientes a los ángulos complementarios

α	30º	45º	60º
Sen α	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos α			
Tg α			

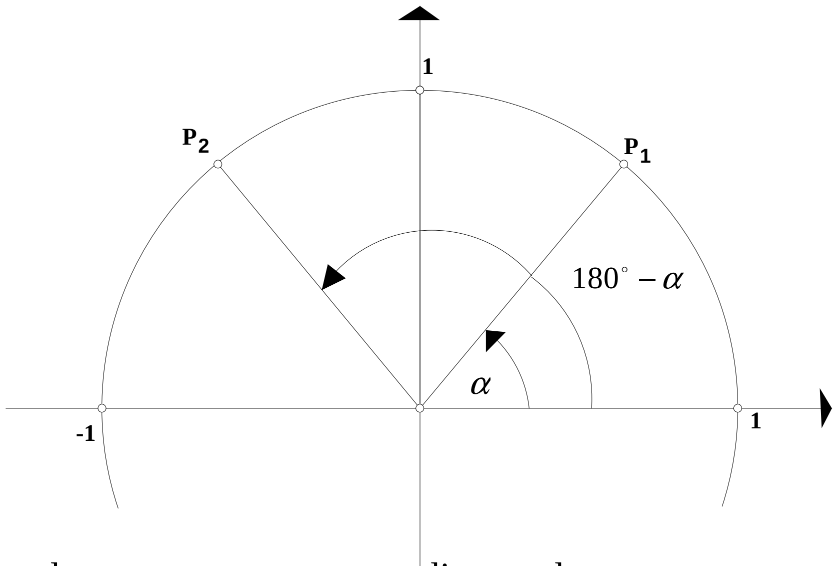
Así nos queda, juntando las dos tablas

α	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
Sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS "SIMÉTRICOS"

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

- Observen en la figura los ángulos suplementarios α y $(180º\text{-}\alpha)$ cuyos lados terminales son simétricos con respecto al eje y



- Marquen los segmentos correspondientes al seno, coseno y tangente de cada uno de los ángulos.
- Si P_1 = (0,6 ; 0,8), por simetría se obtiene P_2 = (-0,6 ; 0,8)
- Aplicando las definiciones, completar:

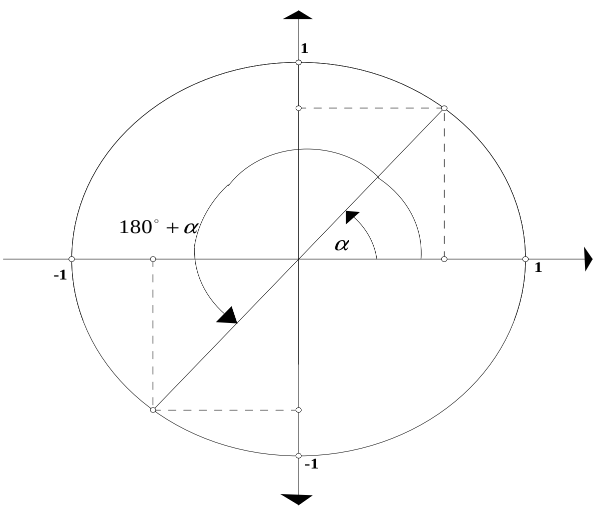
	α	(180º-α)
Sen α	0,8	0,8
Cos α	0,6	-0,6
Tg α	1,33	-1,33

Las similitudes que reflejan el dibujo y los valores obtenidos se deben a la simetría existente entre los ángulos suplementarios.
Generalizando estas relaciones para cualquier par de ángulos suplementarios

$$\text{Sen } (180º-\alpha) = \text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\text{Cos } (180º-\alpha) = \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{Tg } (180º-\alpha) = \text{tg } (\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$$

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180º (o en π)

- Observen los ángulos α y (180º $+\alpha$) dibujados. Sus lados terminales son simétricos con respecto al centro de coordenadas
- Marquen en el dibujo los segmentos correspondientes al seno, al coseno y a la tangente de cada uno de estos ángulos que difieren en π



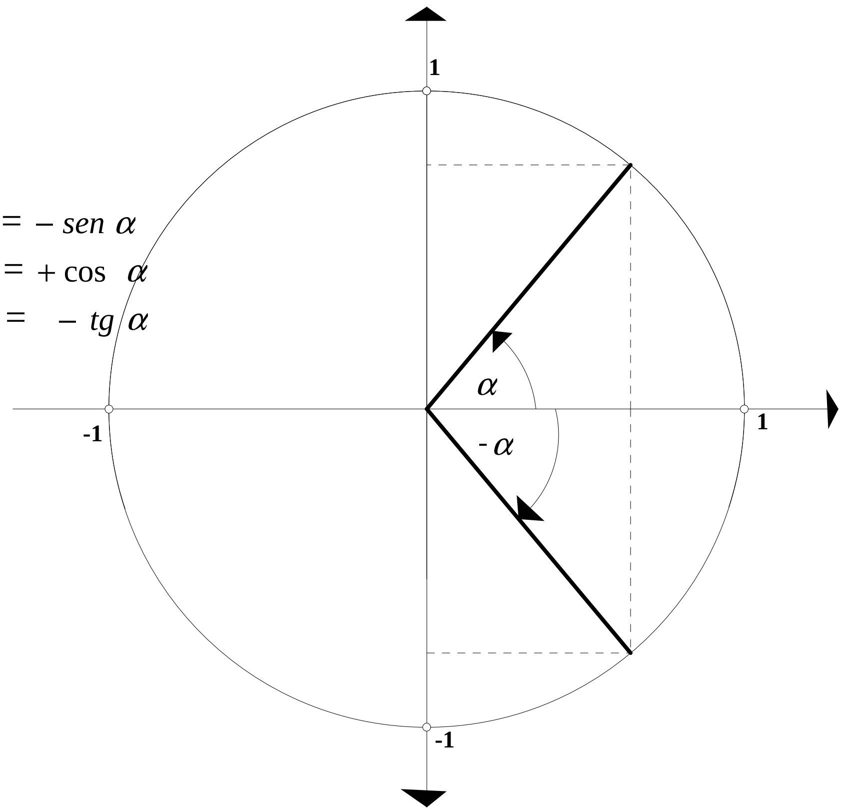
Generalizando estas relaciones

$$\text{Sen } (180^o + \alpha) = \text{sen } (\pi + \alpha) = -\, sen\ \alpha$$
$$\text{Cos } (180^o + \alpha) = \cos (\pi + \alpha) = -\cos\ \alpha$$
$$\text{Tg } (180^o + \alpha) = \text{tg } (\pi + \alpha) = +\, tg\ \alpha$$

ÁNGULOS OPUESTOS

En la figura hemos marcado un ángulo α en el I cuadrante, y su opuesto - α, que se encuentra en el …….cuadrante.
Sus lados terminales son simétricos con respecto al eje x.

- Marquen los segmentos correspondientes al seno, al coseno y a la tangente de cada uno de los ángulos

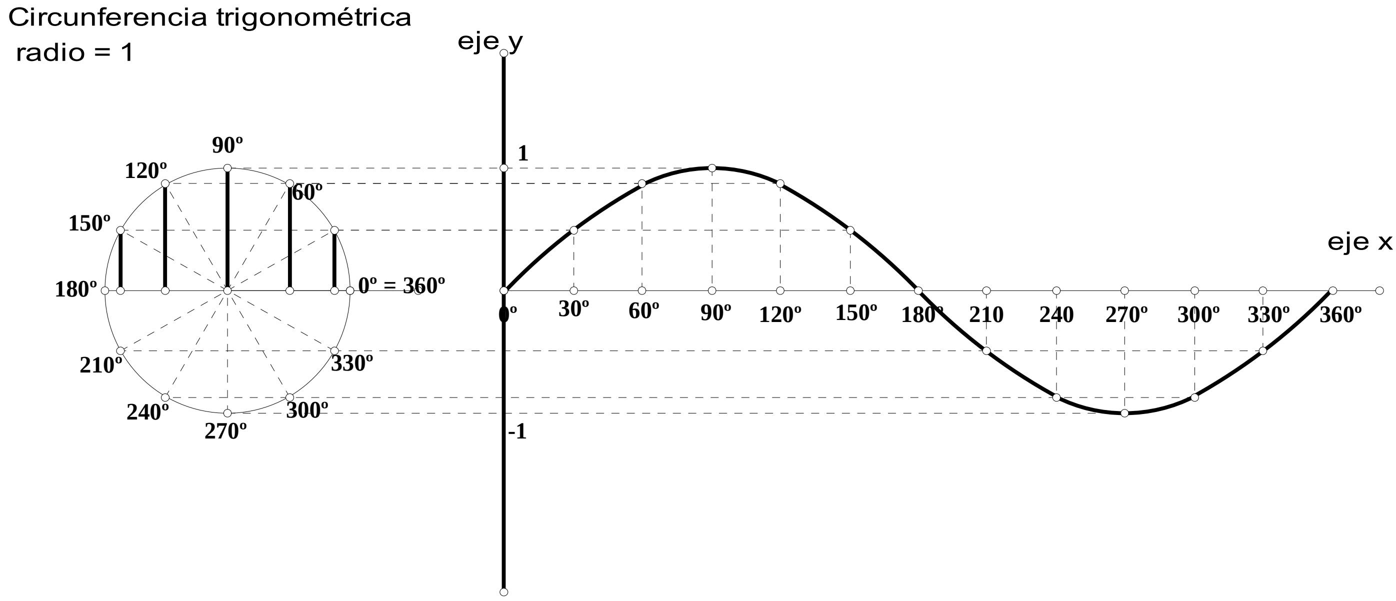


Generalizando estas relaciones

$$\text{Sen } (-\alpha) = -\, sen\ \alpha$$
$$\text{Cos } (-\alpha) = +\cos\ \alpha$$
$$\text{Tg } (-\alpha) = -\, tg\ \alpha$$

LA FUNCIÓN f(x)= sen X

La función f(x) = sen x, cuyo dominio es **R**, asigna a cada número real x el seno de ese número. Para representarla, se puede dividir la circunferencia de radio 1 en doce partes iguales y determinar los valores ….$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \ldots$ luego, se trazan los segmentos asociados a esos valores y se trasladan como muestra la figura.



Esta curva que se obtuvo se llama **sinusoide**.

Analicemos la función:

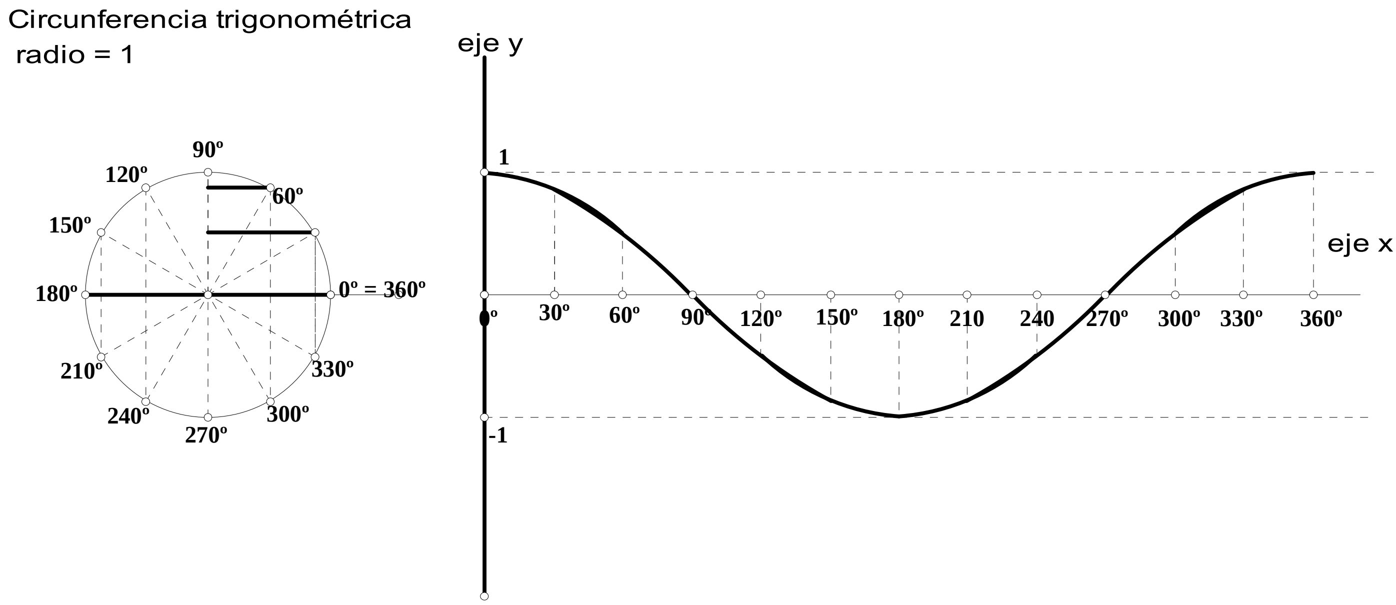
- El valor máximo que toma es “1” y el valor mínimo es “ -1”
- El conjunto imagen es el intervalo [-1;1]
- Como f(0) = 0, el gráfico corta al eje y en (0;0)
- Como los valores que toma la función se repiten cíclicamente cada 2π, se cumple que:

$$sen\,(x+2\pi)=sen\;x$$

por eso, la función seno es periódica, su período es 2π.

LA FUNCIÓN f(x)= cos X

La función f(x) = sen x, cuyo dominio es **R**, asigna a cada número real x el coseno de ese número. Para representarla, se puede dividir la circunferencia de radio 1 en doce partes iguales (de igual manera que se realizó con la función seno) y determinar los valores ….$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\ldots$ luego, se trazan los segmentos asociados a esos valores y se trasladan como muestra la figura.



Esta curva que se obtuvo se llama **cosinusoide**. Tiene la misma forma que la sinusoide pero está desplazada horizontalmente con respecto a ella.

Analicemos la función coseno:

- El valor máximo que toma es "1" y el valor mínimo es " -1"
- El conjunto imagen es el intervalo [-1;1]
- Como f(0) = 1, el gráfico corta al eje y en (0;1)
- Como los valores que toma la función se repiten cíclicamente cada 2π, se cumple que:

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

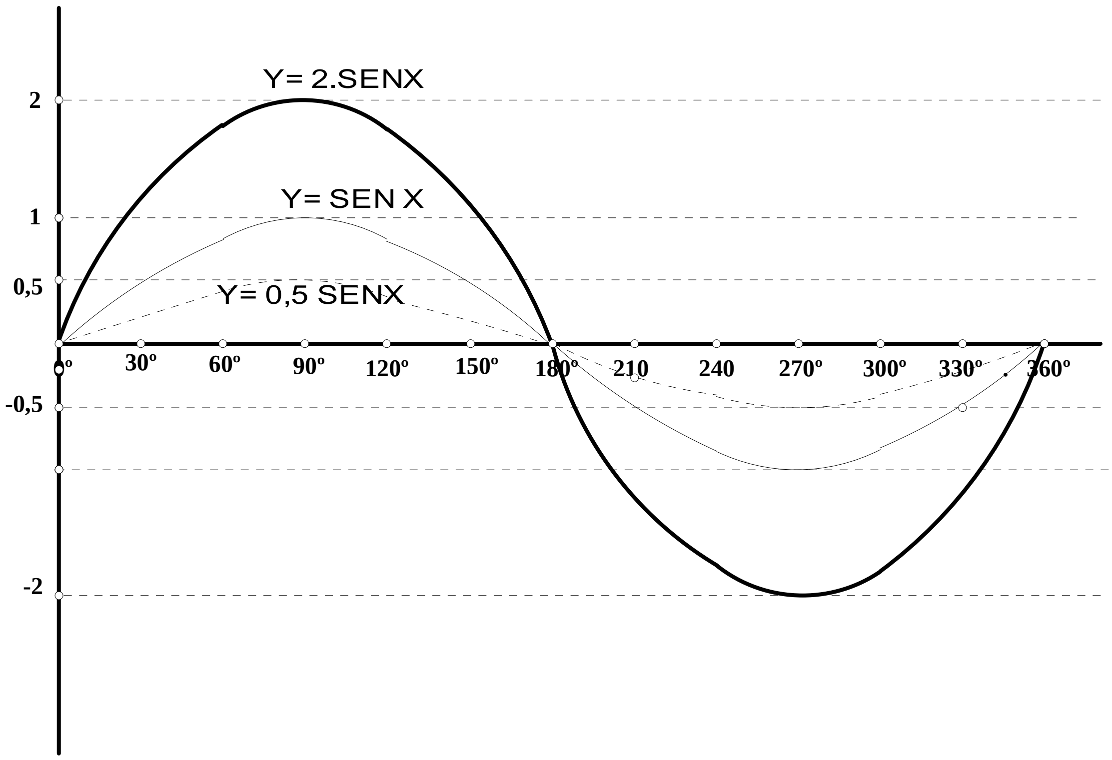
por eso, la función coseno es periódica, su período es 2π.

VARIACIONES A PARTIR DE LA FUNCIÓN f(x) = sen x

Ahora estudiaremos las funciones del tipo **f(x) = a. sen (bx),** donde **a** y **b** son números fijos reales no nulos.
Para ello analizaremos por separado la incidencia de los factores **a** y **b** en la forma del gráfico.

➢ Análisis de la función del tipo f(x) = a. sen x

Observen los gráficos f(x) = sen x; g(x) = 2.sen x; h(x) = $\frac{1}{2}$ sen x, y completen la tabla

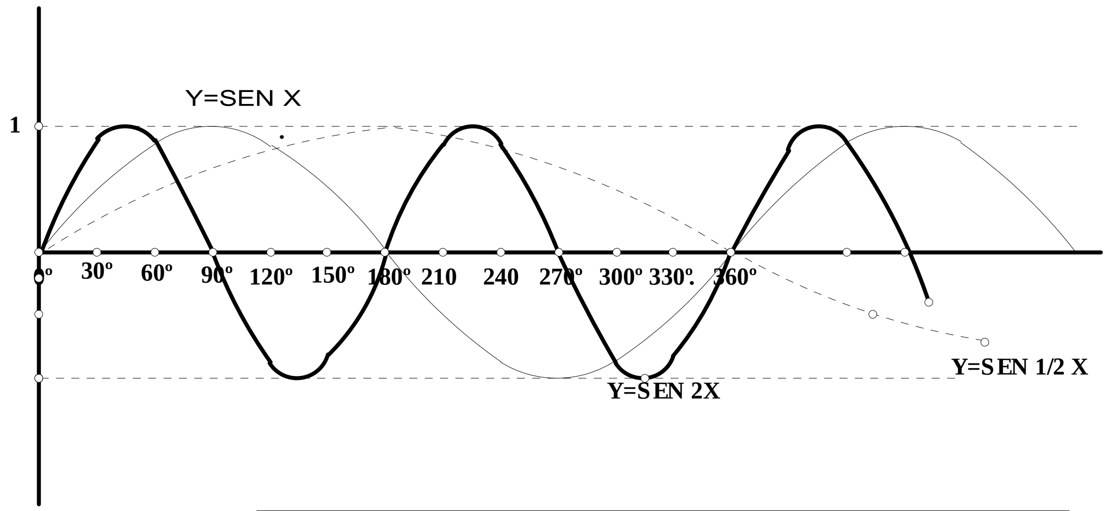


Función	α	Conjunto Imagen	Máximo	Mínimo
F(x)= sen x				
G(x)= 2.sen x				
H(x) = $\frac{1}{2}$ sen x				

El factor "**a**" determina la **amplitud** de la onda y no afecta el período, que para todas estas funciones es de 2π

- Análisis de la función del tipo f(x) = sen (b.x)

Observen los gráficos f(x) = sen x; g(x) = sen (2x); h(x) = sen ($\frac{1}{2}$x) , y completen la tabla



Función	b	Conjunto Imagen	Período
F(x)= sen x			
G(x)= sen (2x)			
H(x) = sen ($\frac{1}{2}$x)			

- El factor "b" determina el período de la función sin modificar la amplitud de onda.
- Cuanto mayor es b, menor es el período. El valor absoluto de "b" indica la cantidad de ondas que hay en el intervalo de longitud 2π. Así en F (x) hay un onda, en G(x) hay 2 ondas y en H(x) hay ½ onda.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS:

Resolvemos ahora ecuaciones en las que aparecen razones trigonométricas de ángulos orientados. Nuestra incógnita será la medida de esos ángulos.
En todos los casos, consideraremos excluidos los valores de la incógnita que anulen algún denominador. Además, buscaremos las soluciones o las medidas de ángulos positivos o iguales que un giro.

Ejemplo 1:

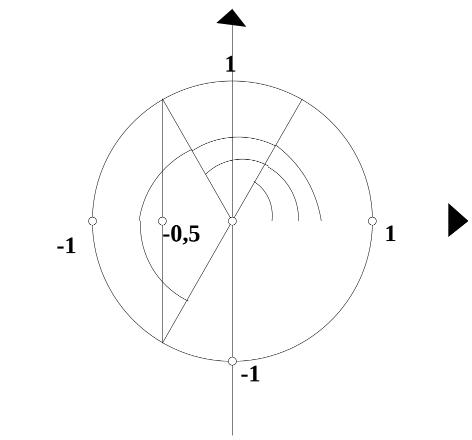
Cos x = - 0,5

- Obtenemos un ángulo que verifica la ecuación, utilizando la función $\cos^{-1}$ de la calculadora científica:

  Así obtenemos $x_1 = 120º$
- En la figura de abajo puede observar que, además de x_1 que está en el II cuadrante, hay otro ángulo (x_2) cuyo coseno también es -0,5 y está en el III cuadrante. Para hallar x_2, procedemos así:
- Buscamos un ángulo en el I cuadrante, simétrico de x_1 con respecto al eje y, al que llamamos ángulo de referencia x_r
- $X_r = 180º - 120º = 60º$
- Hallamos x_2 en el III cuadrante simétrico de x_r con respecto al origen de coordenadas, haciendo

  $x_2 = 180º + x_r =$

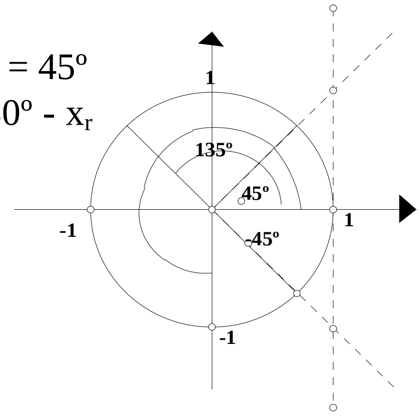
  $x_2 = 180º + 60º = 240º \Rightarrow x_2 = 240º$
- Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 120º$ y $x_2 = 240º$
- Con la calculadora comprueben que cos 120º = -0,5 y que cos 240º = -0,5



Ejemplo 2:

tg x = -1

- Con la calculadora hacemos $tg^{-1}(-1) = -45º$. Como buscamos la medida de un ángulo positivo y menor o igual que un giro, obtenemos así una solución: $x_1 = -45º + 360º = 315º$, que está en el III cuadrante
- En la figura observamos que hay otra solución (x_2) que está en el II cuadrante. Por lo tanto la hallamos así:
- Buscamos x_r en el I cuadrante $\Rightarrow x_r = 360º - 315º = 45º$
- Hallamos x_2 en el II cuadrante, haciendo: $x_2 = 180º - x_r$ $\Rightarrow x_2 = 180º - 45º \Rightarrow x_2 = 135º$
- Las soluciones son $x_1 = 315º$ y $x_2 = 135º$



Ejemplo 3:

3 tg x = 2 .cos x

- Reemplazamos a tg x por $\frac{sen\ x}{\cos x}$. Así obtenemos $3.\frac{sen\ x}{\cos x} = 2.\cos x$
- Pasamos cos x al otro miembro, multiplicando $3.sen\ x = 2.\cos x.\cos x$

$$3.sen\ x = 2.\cos^2 x.$$

- Aplicando la identidad pitagórica reemplazamos por $sen^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - sen^2 x$
- Así obtenemos que: $3.sen\ x = 2.(1 - sen^2 x)$

$$3.sen\ x = 2 - 2.sen^2 x$$

$$2.sen^2 x + 3.sen\ x - 2 = 0$$

- Sustituimos Z= sen x y resolvemos la ecuación cuadrática: $2.z^2 + 3.z - 2 = 0$
-

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \Rightarrow Z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-3+5}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{2}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \\ z_2 = \frac{-3-5}{4} \Rightarrow z_2 = \frac{-8}{4} \Rightarrow z_2 = -2 \end{cases}$$

- Para $Z_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ sen x = $\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^{o} \\ x_2 = 150^{o} \end{cases}$

Para $Z_2 =$ -2 Esta ecuación no posee solución, pues el valor del seno debe estar comprendido

entre -1 y 1