Profesora: Sandra Veronica Redaelli

GUIA Nº 6

Derivada

Parte Teórica

DERIVADA:

GENERALIDADES: La derivación es una de las operaciones que el Análisis Matemático efectúa con las funciones, y permite resolver numerosos problemas de Geometría, Economía, Física y otras disciplinas. Como además las reglas que aplica son muy sencillas, resulta que las derivadas son uno de los capítulos más divulgados del Análisis Matemático

RESEÑA HISTÓRICA:

Los inventores del cálculo diferencial fueron los dos matemáticos: el inglés Isaac Newton que vivió entre 1642 y 1727 y el alemán Godofredo Leibniz. Durante años se suscitó una polémica entre la Escuela Inglesa y la Alemana, sobre quien de los dos fue el primero en llegar al concepto de derivada; pero hoy se acepta que los dos, simultáneamente e independientemente llegaron a establecerlo; pues el estudio y la obra de tantos matemáticos anteriores habían llevado los conocimientos a un nivel que permitió a cada uno de ellos, a Leibniz para resolver problemas de Geometría, y a Newton para resolver problemas de Astronomía y de Física, a establecer las definiciones rudimentarias y reglas básicas de la derivación, sin conocer ninguno de los dos los trabajos realizados por el otro; pues hay que tener en cuenta la lentitud de los medios de comunicación de entonces.

La precisión de los conceptos fundamentales, el rigor de las definiciones y demostraciones, fueron posteriores, el avance de la investigación, en el Análisis Matemático, y en la ciencia en general, se debió al empuje y optimismo de algunos que como Jaun D`Lambert, que vivió entre 1717 y 1783, ante las dificultades y escollos que se presentaban en los nuevos descubrimientos repetía la frase: “*Allez en avant et la foi vous vendrá*”

CONCEPTO DE DERIVADA

Sea y = f(x) una función continua en $[a;b]$ y sea un x_o un punto interior en $[a;b]$, a $\langle$ x_o $\langle$ b .Si incrementamos las x en Δx, es decir pasamos del punto x_o al punto $x_o+\Delta x$, de manera tal que el nuevo punto $x_o+\Delta x$ sea también interior al dominio de la función.

Al incrementar la x_o en Δx, las alturas también sufren un incremento, una variación, dada por

$$\Delta y = f(x_o+\Delta x) - f(x_o)$$

Si formamos el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

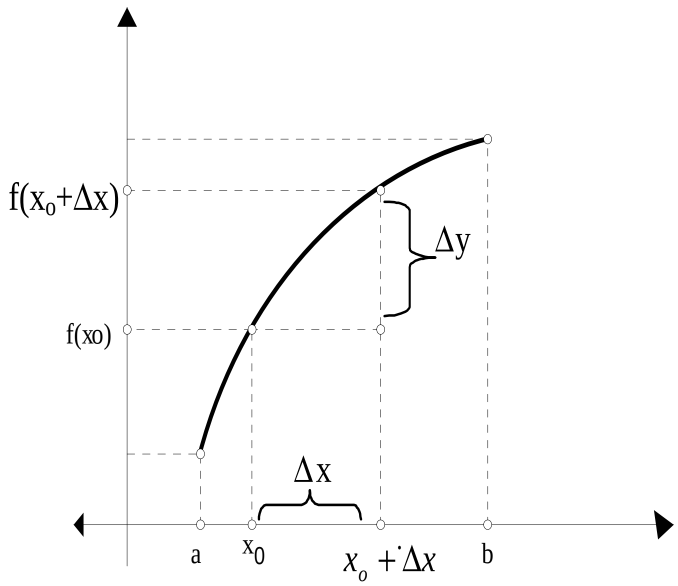
DEFINICIÓN: Se llama ***derivada*** de la función y = f(x) en un punto x_o interior al dominio; al límite, si existe, del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando Δx tiende a cero $\Rightarrow \Delta x \to 0$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Expresado de otra manera: si reemplazamos $x_o + \Delta x = x \;\Rightarrow\; \Delta x = x - x_o$

Derivada de f(x) $\rightarrow$ $$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Gráficamente



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Dada la función y = f(x) función definida en el intervalo cerrado $[a;b]$ y x_o perteneciente al interior del intervalo $(a;b)$

A x_o le corresponde un punto A de la curva.

A $x_o + \Delta x$ le corresponde un punto B de la curva.

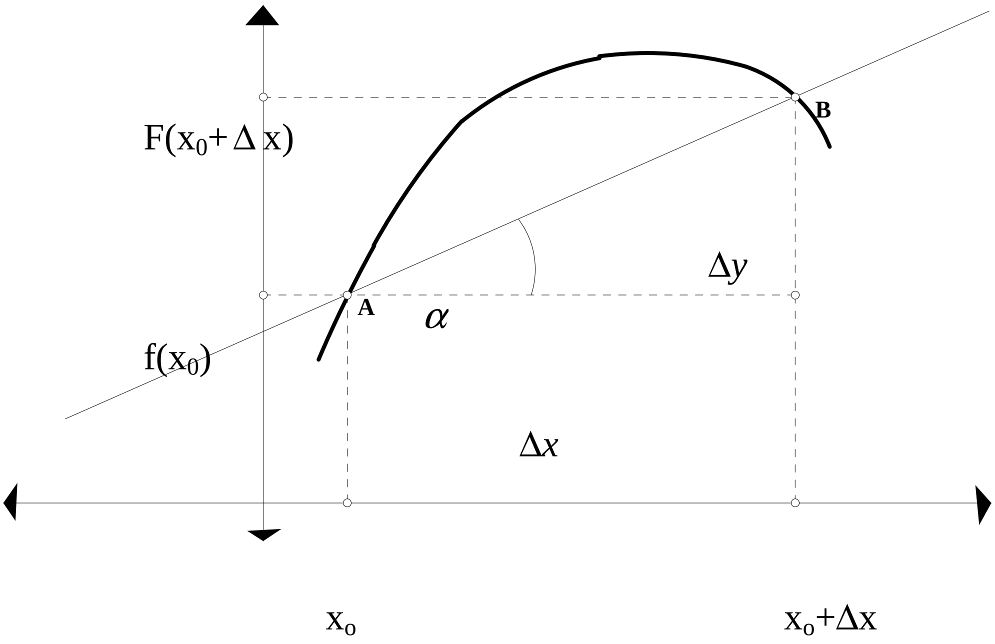
Trazamos la recta PQ secante a la curva. El cociente incremental es la tangente del ángulo α

$$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

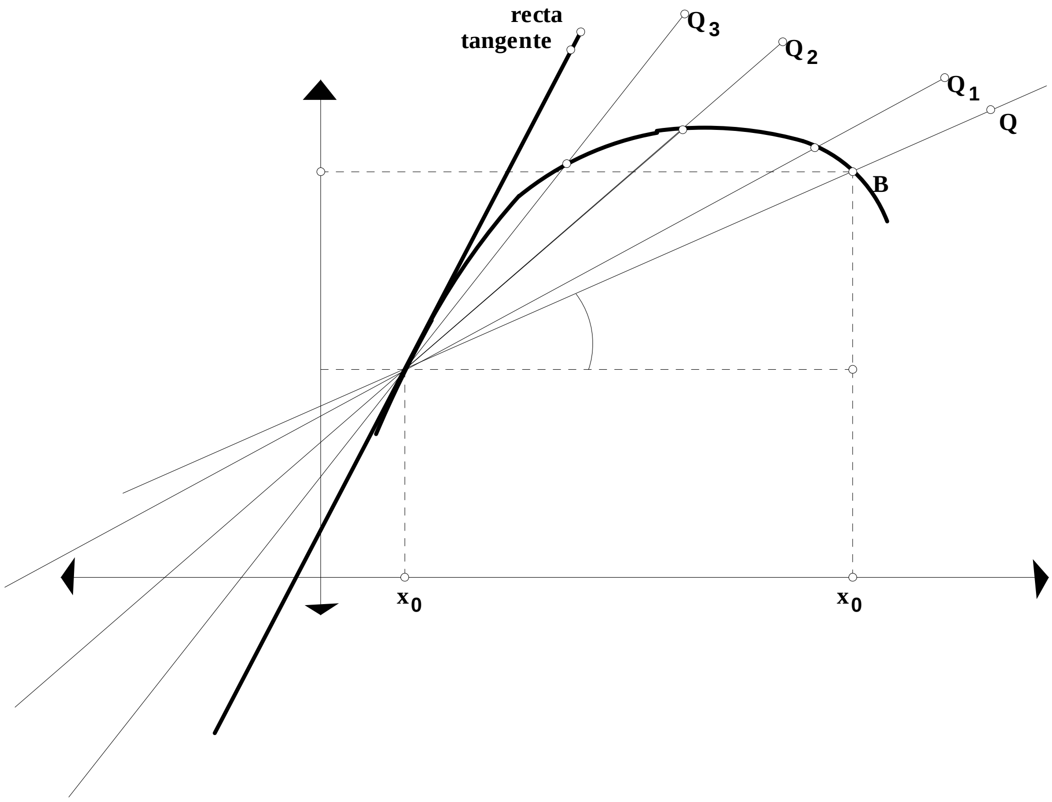
$\downarrow$ reemplazando

$$tg\ \alpha = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

El cociente incremental es la pendiente de la recta secante AB.



Cuando Δx se hace más pequeño, el punto B se aproxima a A, pasa así por las distintas posiciones Q_1, Q_2, Q_3. Se tiene así una sucesión se secantes que todas pasan por el punto A. Cuando $\Delta x \to 0$ la posición límite de estas rectas secantes es la de la tangente a la curva en A, que se destaca en el trazo más grueso en la figura y que determina el ángulo α con el semieje positivo x.

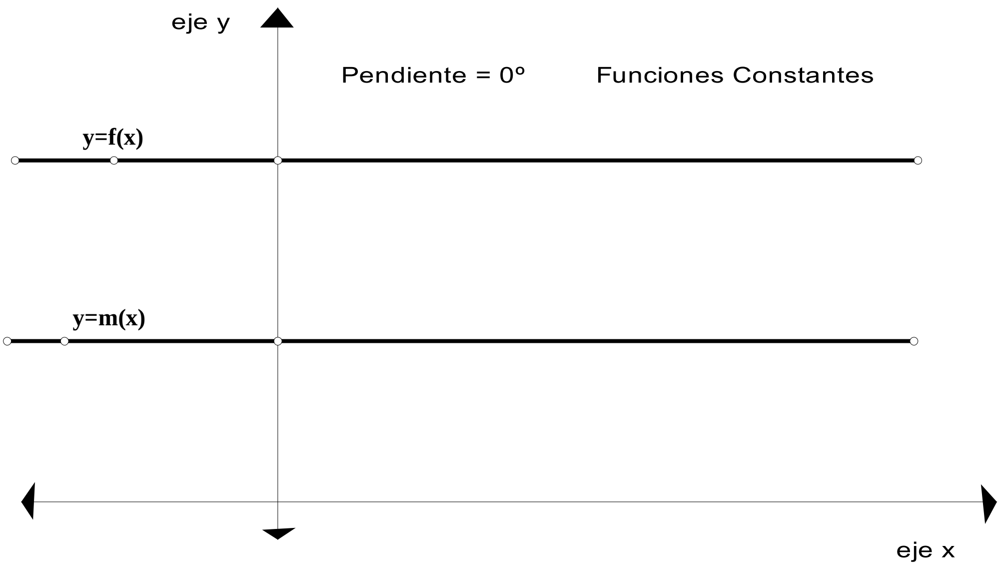


Por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$ o sea la derivada en x_o es un número que mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A.

Luego si la derivada de la función en un cierto x_0 es cero, quiere decir que la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a x_0, tiene pendiente cero$\Rightarrow$ es paralela al eje x.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\downarrow}{m} = tg\ \alpha \\ pendiente = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^o = tg\ \alpha$$

$$arc\ \ tg\ 0^o = \alpha \Rightarrow \alpha = 0^o$$



FÓRMULAS DE DERIVACIÓN:

1) Dada la función y= x^2, para hallar su derivada utilizamos la definición

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0).(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$$

2) Dada la función y= x^3, para hallar su derivada utilizamos la definición

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0).(x^2+x.x_0+x_0^2)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}x^2+x.x_0+x_0^2=3x_0^2$$

3) Dada la función y= $\sqrt{x}$, para hallar su derivada utilizamos la definición

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0).\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

ALGEBRA DE FUNCIONES

Vamos a ver como obtenemos la fórmula de la derivada de un producto.
y= u.v deseamos hallar la derivada de y, es decir y'
aplicamos logaritmos a ambos miembros
ln y = ln (u.v)
ln y = ln u + ln v $\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{u}\cdot u'+\frac{1}{v}\cdot v'$

$$y'=\left(\frac{1}{u}\cdot u'+\frac{1}{v}\cdot v'\right)\cdot y$$

$$y'=\left(\frac{u'.v+u.v'}{u.v}\cdot\right)\cdot y$$

$$y'=\left(\frac{u'.v+u.v'}{u.v}\cdot\right)\cdot u.v$$

$$y'=u'.v+u.v'$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$y = k$	$y' = 0$
$y = n.x$	$y' = n$
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = senx$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -senx$
$y = tgx$	$y' = \sec^2 x$
$y = \cot gx$	$y' = -\cos ecx$
$y = \sec x$	$y' = tgx.\sec x$
$y = \cos ecx$	$y' = -\cot gx.\cos ecx$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)}.f'(x)$
$y = a^x$	$y' = a^x.\ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$y' = [f(x)]^{g(x)}.\left[g'(x).\ln f(x) + \dfrac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right]$
$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$
$y = f(x)^k$	$y' = k.f'(x)^{k-1}$
$y = k.f(x)$	$y' = k.f'(x)$