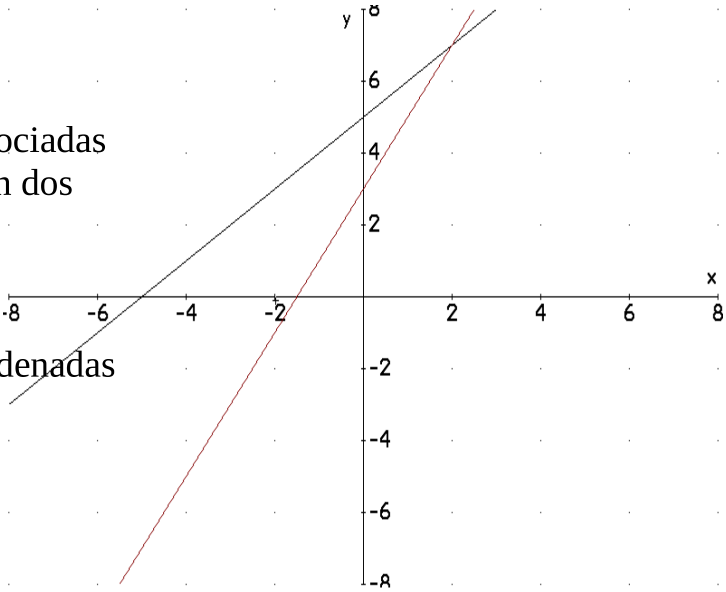
GUIA Nº 6

Sistemas de ecuaciones

Parte Teórica

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



En el gráfico están representadas las rectas asociadas al siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

Resolver éste sistema significa hallar las coordenadas del punto que tienen en común ambas rectas.

METODOS DE RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Los métodos son varios nosotros trabajaremos con tres:

- ✓ 1 Método gráfico
- ✓ 2 Método de igualación
- 3 Método de sustitución

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Como su nombre lo indica proviene de igualar dos expresiones

Ejemplo 1: Sea el sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Vamos a exponer los pasos a seguir utilizando el método de igualación

Pasos a seguir	Resolución
1) Despejamos en ambas ecuaciones la misma incógnita	$x + 2y = 1$ $2y = 1 - x$ $y = \frac{1-x}{2}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ $3x + y = 2$ $y = 2 - 3x$
2) Igualamos las dos expresiones obtenidas	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 2 - 3x$
3) Resolvemos la ecuación resultante en el paso anterior	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = 2 - 3x$ $-\frac{1}{2}x + 3x = 2 - \frac{1}{2}$ $\frac{5}{2}x = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3}{2} \div \frac{5}{2}$ $x = \frac{3}{\cancel{2}} \bullet \frac{\cancel{2}}{5}$ $x = \frac{3}{5}$
4) Calcula el valor de la otra incógnita. Reemplazando las ecuaciones por el valor ya encontrado de x	$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}$ $y = \frac{1}{5}$ $y = 2 - 3 \cdot \frac{3}{5}$ $y = 2 - \frac{9}{5}$ $y = \frac{1}{5}$
5) El punto de intersección obtenido es:	$\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right)$

<u>MÉTODO DE SUSTITUCIÓN</u>

Como su nombre lo indica proviene de sustituir (reemplazar) una expresión en otra.

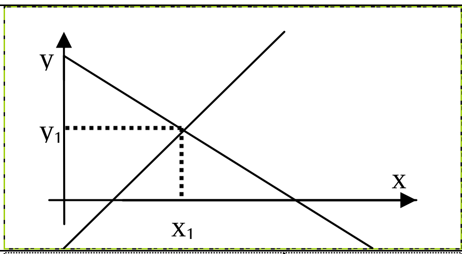
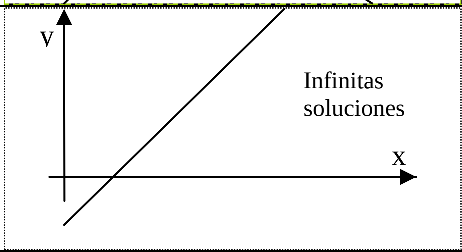
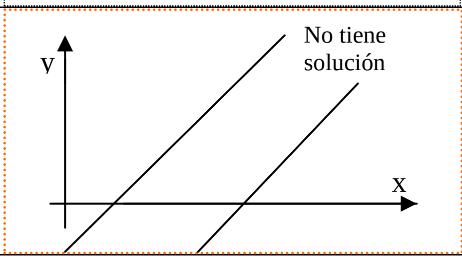
<u>Ejemplo 2</u>: Sea el sistema $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$

Vamos a exponer los pasos a seguir utilizando el método de sustitución

Pasos a seguir	Resolución
1)Despejamos una incognita de una de las dos ecuaciones (por ejemplo, despejamos la "x" de la 1° ecuación)	$x+4y=2$ $x=2-4y$
2) Sustituimos dicha incógnita en la otra ecuación	$-2.(2-4y)+y=3$
3) Resolvemos la ecuación resultante en el paso anterior	$-2.(2-4y)+y=3$ $-4+8y+y=3$ $-4+9y=3$ $9y=3+4$ $9y=7$ $y=\frac{7}{9}$
4) Calcula el valor de la otra incógnita. Reemplazando las ecuaciones por el valor ya encontrado de y	$x=2-4y$ $x=2-4\cdot\frac{7}{9}$ $x=2-\frac{28}{9}$ $x=-\frac{10}{9}$ $-2x+y=3$ $-2x=3-y$ $-2x=3-\frac{7}{9}$ $-2x=\frac{20}{9}$ $x=\frac{20}{9}\div(-2)$ $x=-\frac{10}{9}$
5) El punto de intersección obtenido es:	$\left(-\frac{10}{9};\frac{7}{9}\right)$

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Cuando resolvemos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas podemos encontrarnos ante tres casos.

¿Qué sucede en el gráfico?	**Gráfico**	**Caso**	**Clase de sistema**
Las rectas se cortan en un punto		Tiene una única solución	Determinada
Las dos ecuaciones representan la misma recta		Tiene infinitas soluciones	Indeterminado
Las rectas son paralelas		No tiene ninguna solución	Incompatible

- **SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS**

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se utiliza el método de igualación o sustitución ya aprendido años anteriores

- **SISTEMAS MIXTOS DE DOS ECUACIONES**

Vamos a resolver el siguiente sistema mixto de dos ecuaciones, una cuadrática y una lineal, con dos incógnitas

Los gráficos de las funciones $\begin{cases} f(x) = x + 6 \\ g(x) = x^2 + 2x \end{cases}$ se interceptan cuando, para el mismo valor de x, ambas funciones tienen igual valor de y. Entonces podemos plantear:

$$f(x) = g(x)$$

$x + 6 = x^2 + 2x$ queda planteada una ecuación cuadrática. La cual resolvemos con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

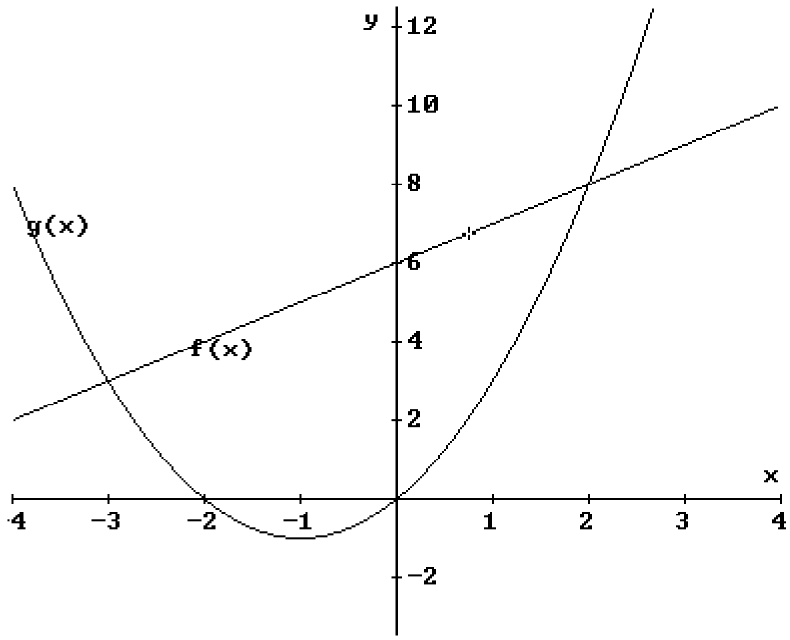
Una vez obtenidos $x_1 = -3$. e $x_2 = 2$, necesitamos hallar los valores de y.

Para ello, bastará con reemplazar los valores de x_1 y el de x_2 en cualquiera de las dos funciones. Lo hacemos en f(x), ya que es más sencillo.

$F(x_1) = F(-3) = -3+6 = 3$ Así el punto de intersección es: $(x_1; y_1)= (-3; 3)$

$F(x_2) = F(2) = 2+6.$ Así el punto de intersección es: $(x_2 ; y_2)= (2; 8)$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA: Si bien ya conocemos los puntos de intersección, conviene graficar las funciones como lo hacemos habitualmente y comprobar si éstos gráficos pasan por dichos puntos



RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales de "m" ecuaciones y "n" incógnitas.

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 + \ldots\ldots + z_1x_n = R_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 + \ldots\ldots + z_2x_n = R_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 + \ldots\ldots + z_3x_n = R_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + d_nx_4 + \ldots\ldots + z_nx_n = R_n \end{cases}$$

Solución del sistema: es un conjunto de valores $(x_1; x_2; x_{3;} \ldots; x_n)$ que son solución de todas las ecuaciones.

Conjunto Solución: Un sistema puede tener una, dos o más o ninguna solución o infinitas, el conjunto solución de un sistema es el conjunto formado por todas las soluciones del sistema.

Sistemas Equivalentes: Dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución

Posibles soluciones de un sistema: Un sistema puede tener solución o no. Si un sistema tiene solución se llama **sistema compatible**, si no tiene solución se llama **incompatible.**

Si es compatible puede admitir 1 única solución o infinitas soluciones. Si tiene solución única se llama **sistema compatible determinado**, si tiene infinitas soluciones se llama **sistema compatible indeterminado**

$$Sistema:\begin{cases} compatible\begin{cases} Deter\min ado \\ In\det er\min ado \end{cases} \\ \\ Incompatible \\ \end{cases}$$

Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, nosotros veremos uno de ellos, por el cual se obtiene el resultado buscado creando ceros. Veamos para esto algunos ejemplos:

Ejemplo 1: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \\ \text{Fila 1} \\ \text{Fila 2} \\ \text{Fila 3} \end{array} \begin{array}{c} \text{Columnas} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 5 & 6 \end{array}\right] \end{array}$$

1º fila x $\frac{3}{2}$ - 2º fila

1º fila x $\frac{1}{2}$ - 3º fila

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -9 & -6 \end{array}\right]$$

2º fila x 2

3º fila x 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right]$$

2º fila x $\frac{5}{3}$ + 3º fila

$$\Rightarrow \frac{8}{3}x_3 = -\frac{8}{3} \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\begin{aligned} -3x_2 + 7x_3 &= 2 \\ -3x_2 + 7.(-1) &= 2 \\ -3x_2 - 7 &= 2 \\ -3x_2 &= 2 + 7 \\ x_2 = 9 &\Rightarrow x_2 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - (-3) + (-1) &= 6 \\ 2x_1 + 3 - 1 &= 6 \\ 2x_1 + 2 &= 6 \\ 2x_1 = 4 &\Rightarrow x_1 = 2 \end{aligned}$$

La solución es **(2; -3; -1)** el sistema es **compatible determinado.**

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

1	-2	3	11	
4	1	-1	4	
2	-1	3	10	
1	-2	3	11	
0	-9	13	40	1º fila x 4 – 2º fila
0	-3	3	12	1º fila x 2 – 3º fila
1	-2	3	11	
0	-9	13	40	
0	0	4/3	4/3	2º fila x 1/3 – 3º fila

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}Z = \frac{4}{3} \Rightarrow z = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -9y + 13Z &= 40 \\ -9y + 13.1 &= 40 \\ -9y + 13 &= 40 \\ -9y &= 40 - 13 \\ -9y &= 27 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 11 \\ x - 2.(-3) + 3.1 &= 11 \\ x + 6 + 3 &= 11 \\ x + 9 &= 11 \\ x &= 11 - 9 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución es **(2; -3; 1)** el sistema es **compatible determinado.**

Sistema Homogéneo: Se llama sistema homogéneo cuando todas las ecuaciones lineales que forman el sistema están igualadas a cero.

Ejemplo: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

El sistema homogéneo siempre admite al menos una solución que es la (0;0;0) . Esta solución recibe el nombre de **solución trivial**. Un sistema homogéneo por lo tanto no puede ser incompatible. Puede ser que además de la trivial el sistema admita otras soluciones con lo cual el sistema es compatible determinado