GUIA Nº 3

Números Complejos

Parte Teórica

Historia de los Números

Por **Martín A. Cagliani**

La noción de número y de contar, así como los nombres de los números más pequeños y más comúnmente empleados, se remonta a épocas prehistóricas.

Con la invención de la escritura, se tubo que dar el paso siguiente, que fue el de escribir los números. Los primeros números escritos, eran simplemente signos iguales que se limitaban a contar hasta llegar al número deseado.

Por ejemplo uno era ', dos '', cinco ''''', ocho '''''''', y así sucesivamente hasta llegar al numero deseado. Como se hace difícil leer muchos signos de este estilo, por ejemplo 27 seria muy molesto tener que leer ''''''''''''''''''''''''''', así que se los empezó a separar en grupos, preferentemente de a diez (es el que se utilizo mas en la antigüedad). Luego se invento un símbolo para lo diez grupos de diez, o sea cien, y así sucesivamente. Este sistema lo utilizaban los babilonios, pero con un sistema cuneiforme, que eran formas de cuña marcadas en arcilla.

En las primeras etapas de su desarrollo, los griegos usaron un sistema semejante al de los babilonios, pero en épocas posteriores se generalizó un método alternativo. Recurrieron al empleo de otro sistema ordenado: el de las letras del alfabeto.

Los griegos serian los que inventarían los números irracionales, mas precisamente Pitagoras.

El cero lo inventaron los hindúes por el año 500, los hindúes denominaron a este símbolo sunya, que quiere decir "vacío". Este fue un gran avance porque ya no se confundirían los números como el 507 con el 5 7, esta era la forma utilizada anteriormente, dejando un espacio. Este símbolo de la nada fue recogido por los árabes hacia el s. VIII, quienes lo denominaron céfer, que en su idioma quería decir "vacío". Esta palabra dio origen a las palabras castellanas cero y cifra. Con mucha lentitud llegaron los números arábigos a occidente y reemplazaron a los números romanos, que estos habían esparcido por todo su imperio.Fue un matemático italiano, Leonardo Fibonacci (1170-1240), el primero en escribir sobre los números arábigos en occidente. Tuvo la ocasión de viajar ampliamente por el norte de Africa. Allí aprendió la numeración árabe y la notación posicional (el cero). Fibonacci escribió un libro sobre el tema en 1202, *Liber Abaci* (o libro del ábaco), que sirvió para introducir los números arábigos en Europa, pero los romanos aún se mantuvieron en vigor durante tres siglos más.

El matemático italiano Geronimo Cardano (1501-1575), fue el que demostró, en 1545, que las deudas y los fenómenos similares se podían tratar con números negativos. Hasta ese momento, los matemáticos habían creído que todos los números tenían que ser mayores que cero.En la antigüedad no se contaba mas de varios miles, si así era se limitaban a exagerar diciendo cientos de miles o mas que las estrellas. El numero millón y la palabra, (que viene del latín que significa "gran millar"), que son mil millares, data de la alta Edad Media, época en que el comercio había revivido, hasta alcanzar un punto de necesitar una palabra especial. Los billones y los trillones vinieron mas tarde. El matemático ingles John Wallis (1616-1703) fue el que consiguió dar sentido a los números imaginarios (numero que se inventa y se le asigna un símbolo com *i*)en 1685, así como los números complejos

Desde **Al'Khwarizmi** (800 DC), precursor del Álgebra, que sólo obtenía las soluciones positivas de las ecuaciones, pasaron más de ocho siglos, hasta que finalmente **Descartes** (en la foto) en 1637 puso nombre a las raíces cuadradas de números negativos, imaginarios, y dedujo que las soluciones no reales de las ecuaciones son números de la forma ***a+bi***, con ***a*** y ***b*** reales. Durante todo ese tiempo se manejaron esas soluciones sin definirlas claramente, aunque sí **Albert Girard** en 1629 afirmaba ya que una ecuación polinómica de grado ***n***, tiene ***n*** soluciones

¿En qué consiste el problema?

Cada ampliación del campo numérico supuso la introducción de nuevos números que hicieran posible operaciones que hasta entonces carecían de sentido:

- La necesidad de restar 3 – 8 , por ejemplo, impuso la creación de los números negativos, pasando así de **N** a **Z.**

- El tener que dividir 3 entre 8, por ejemplo justificó la invención de las fracciones, pasando así de **Z** a **Q.**

- La necesidad de expresar ciertas medidas justificó la admisión de los irracionales en el campo numérico, que pasó de Q a R .

- Los algebristas de los siglos XV y XVI , al encontrarse con ecuaciones de segundo grado del tipo:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

aplicaban la fórmula de resolución: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ y obtenían:

$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.13}}{2.1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$ tal como hasta ahora hemos hecho nosotros, decían: ***no es posible extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Por lo tanto la ecuación no tiene solución.***

Pero más tarde empezaron a operar con estas expresiones como si fueran reales. Hacían:

$\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}.\sqrt{-1}}{2}=\frac{4\pm 6.\sqrt{-1}}{2}=\frac{4}{2}\pm\frac{6.\sqrt{-1}}{2}=2\pm 3\sqrt{-1}$ y seguían manejando $\sqrt{-1}$ como

si de un número real se tratara, con intención de ver hasta donde se podía llegar por ese camino.

La realidad es que en R (números reales) no podemos resolver raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1.

Se utiliza el símbolo "i" para indicar un número tal que: $i^2=-1$.

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número **no** es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que no son reales de algunas ecuaciones. Asi, en nuestro ejemplo:

$$\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=\frac{4}{2}\pm\frac{6i}{2}=2\pm 3i$$

Ejemplos:

- $x^2+1=0$

  $x^2=-1$

  $x=\sqrt{-1}$

  $x=\pm 1\,i \quad \begin{cases} x_1=1\,i \\ x_2=-1\,i \end{cases}$

- $x^2+2=0$

  $x^2=-2$

  $x=\sqrt{-2}$

  $x=\pm\sqrt{2}\,i \quad \begin{cases} x_1=\sqrt{2}\,i \\ x_2=-\sqrt{2}\,i \end{cases}$

DEFINICIÓN:

A los números de la forma $a+b\,i$ donde a y b son reales e $i^2=-1$ se los llama **números complejos.**

"i" verifica que $i^2=-1$

Dado el número complejo : Z = $a+b\,i$

Se suele utilizar la letra Z para designar a un número complejo

"a" se llama a la parte real de Z. Lo escribimos así: a= Re(Z)

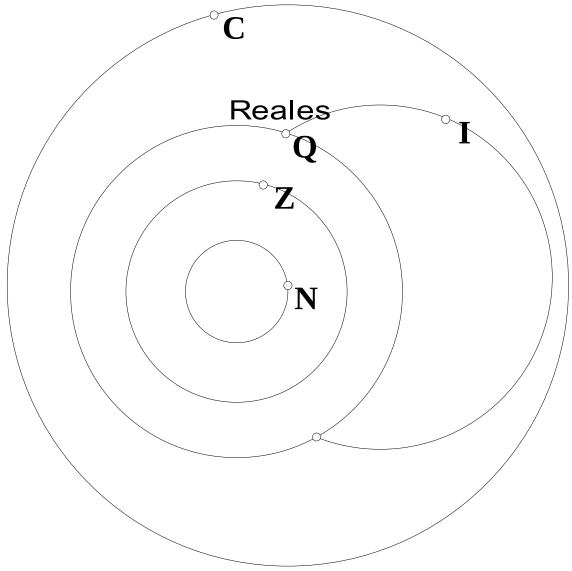
"b" se llama a la parte imaginaria de Z. Lo escribimos así: b = Im(Z)

Observemos que si b = 0, el número complejo sólo tiene parte real. Por lo tanto **los números reales forman parte de los números complejos.** Así: 3, -4, $\frac{1}{6}$ $y\sqrt{3}$ son reales y, por lo tanto, complejos.´

Si b ≠ 0, el número complejo sí tiene parte imaginaria. A estos números se los llama **imaginarios**, por ejemplo: $3+2\,i$; $-4-5\,i$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\,i$; $\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i$ todos estos son números complejos imaginarios.

A los números complejos de la forma $b\,i$. se les llama **imaginarios puros**. La parte real es cero, por ejemplo: $3\,i$; $-5\,i$; $\sqrt{3}\,i$; $-\frac{7}{3}i$ todos estos números son imaginarios puros.

Al conjunto de todos los números complejos lo designamos con el símbolo **C,** y está definido de forma tal que incluye a los reales (como explique anteriormente), representados por los números complejos cuya parte imaginaria es nula.



EL CONJUGADO Y EL OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

A partir de un número complejo $Z = a + b\,i$, se definen los siguientes

- El conjugado de Z es $\overline{Z} = a - b\,i$, (la parte real es la misma y la parte imaginaria es opuesta)

- El opuesto de Z es $-Z = -a - b\,i$, (la parte real y la parte imaginaria son opuestas)

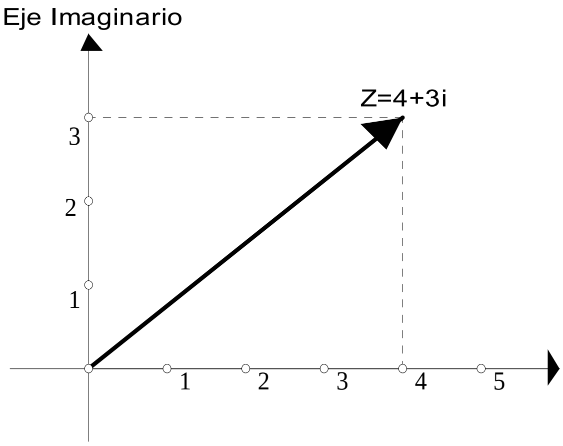
Ejemplo:

- $Z_1 = -1 - 2\,i$ $\quad \overline{Z_1} = -1 + 2\,i$ $\quad -Z_1 = 1 + 2\,i$
- $Z_2 = 4\,i$ $\quad \overline{Z_2} = -4\,i$ $\quad -Z_1 = -4\,i$
- $Z_3 = 6$ $\quad \overline{Z_3} = 6$ $\quad -Z_3 = -6$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

El número complejo $Z = 4 + 3\,i$ se puede representar como el vector $\vec{v} = (4;3)$

Para referirnos a un número complejo escribimos Z = a+ b *i*
Para referirnos a un vector en el plano escribimos $\vec{v} = (a\,;b)$
"a" es la primera componente del vector (a; b)
"b" es la segunda componente del vector (a; b)



OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En los siguientes ejemplos podemos observar cómo sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números complejos.
Consideremos $Z_1 = 2 + 3\,i \quad y \quad Z_2 = 1 - 5\,i$

SUMA: $Z_1 + Z_2 = (2+3\,i) + (1-5\,i) = 2 + 3\,i + 1 - 5\,i = 3 - 2\,i$

RESTA: $Z_1 - Z_2 = (2+3\,i) - (1-5\,i) = 2 + 3\,i - 1 + 5\,i = 1 + 8\,i$

MULTIPLICACIÓN: $Z_1 . Z_2 = (2+3\,i).(1-5\,i) = 2.1 - 2.5\,i + 3\,i.1 - 3\,i.5\,i =$

$$= 2 - 10\,i + 3\,i - 15\,i^2 = 2 - 10\,i + 3\,i - 15\,.(-1) =$$

$$= 2 - 10\,i + 3\,i + 15 = 17 - 7\,i$$

DIVISIÓN: Para resolver la división entre dos números complejos, siendo el divisor no nulo, multiplicamos a ambos por el conjugado del divisor, del siguiente modo:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}} = \frac{2+3\,i}{1-5\,i} \cdot \frac{1+5\,i}{1+5\,i} = \frac{2+10\,i+3\,i+15\,i^2}{1^2-(5i)^2} = \frac{2+10\,i+3\,i-15}{1-25.(-1)} = \frac{-13+13\,i}{1+25} = \frac{-13+13\,i}{26} = \frac{-13}{26} + \frac{13}{26}i$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$